منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی ـ پژوهشی، سال نهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۷، ۴۹–۸۷

تحلیل دلالت‌شناسانهٔ منطق شهودی I

برزویه بگلری*

چکیده

از زمان انتشار مقالهٔ سول کریپکی با عنوان «تحلیل دلالت‌شناسانهٔ منطق شهودی I»، در سال ۱۹۶۵، تمام آن‌چه پیش‌ازآن در دلالت‌شناسی منطق شهودی نگاشته شده بود، تفسیر برآوئر ـ هیتینگ ـ کولموگروف (BHK)، تفسیر توپولوژیک، و مدل‌های بث، تحت سایهٔ تنقیح و پالودگی‌اش قرار گرفت و دلالت‌شناسی استاندارد برای منطق شهودی برآوئر ــ هیتینگ قلمداد شد. تاکنون، به‌منظور تفسیر، مقابله، و به‌فهمی، ادبیات و مطالعات کلانی حول این مقاله شکل گرفته است. کریپکی این مقاله را در پایان قریب به یک دهه تفکر بارور دربارهٔ منطق موجهات، دلالت‌شناسی آن، و انتشار تحقیقاتش مشتمل‌بر روشی خلاقانه برای دلالت‌شناسی منطق موجهات در شش مقاله نوشت و منتشر کرد و در آن برای طراحی تفسیری از دلالت‌شناسی منطق شهودی از تحقیقات خودش در منطق موجهات و اخذ مفهوم فورسینگ از ریاضیدان آمریکایی پل کوئن سود جست.

در این نوشته، پس از بررسی جایگاه تاریخی ــ فنگجی مقالهٔ کریپکی در ادبیات شهودگرایی، ترجمهٔ مقالهٔ او ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: منطق شهودی، دلالت‌شناسی، سول کریپکی، آرنـد هیتینگ، اخبرتوس یان برآوئر.

۱. مقدمه: کریپکی و شهودگرایی

کریپکی از اواخر دههٔ ۶۰ تا اواسط دههٔ ۷۰ میلادی، طی شش مقاله، نتایج یک دهه مطالعه روی منطق موجهات و طراحی دلالت‌شناسی خلاقانه برمبنای جهان‌های ممکن

* کارشناس ارشد فلسفهٔ منطق، گروه فلسفه، دانشکدهٔ ادبیات و زبان‌های خارجی، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران، beglari.borzuya@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۰۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۲۰

را منتشر کرد. در پایان این دوره در سال ۱۹۶۵ مقاله‌ای با عنوان «تحلیل دلالت‌شناسانهٔ منطق شهودی I» با ویراستاری مایکل دامت (Michael Dummett) و جان کرازلی (John Newsome Crossley) در کتاب *سیستم‌های صوری و توابع بازگشتی* (Dummett and Crossley 1965) طبع کرد و در آن با طرح روشی نو دلالت‌شناسی منطق شهودی را تفسیر کرد. عجیب نیست که تفسیر او از دلالت‌شناسی منطق شهودی تا این حد به نظریهٔ قرینه‌اش در منطق موجهات شبیه باشد. تا دو سال بعد از ۱۹۶۵ هیچ نوشته‌ای از او منتشر نشد و پس‌ازآن تاکنون دربارهٔ دلالت‌شناسی و منطق شهودی مطلبی منتشر نکرده است. بنا بوده است این مقاله مقالهٔ اول از سه‌گانهٔ مطالعات کریپکی روی منطق شهودی و دلالت‌شناسی آن باشد. کریپکی توضیح برخی موارد را به مقالهٔ دوم (II) موکول می‌کند. مقالهٔ دوم و سوم تاکنون منتشر نشده است و جز عنوان نشانه‌ای از وجودشان در هیچ‌یک از زندگی‌نامه‌ها و شرح آثار او نیست.

تاریخ منطق شهودی پیش از تفسیر کریپکی تفاسیر دیگری نیز برای دلالت‌شناسی‌اش دیده است. در دههٔ ۳۰ قرن بیستم میلادی تعدادی سیستم دلالت‌شناسی، ازقبیل دلالت‌شناسی برمبنای توپولوژی، معرفی شدند که سعی داشتند برای شهودگرایی همان کاری را بکنند که جدول ارزش عادی برای منطق کلاسیک انجام داد.

تفسیری دیگر، با عنوان تفسیر برآوئر ــ هیتینگ ــ کولموگروف Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK)، آن چیزی را که از اثبات‌کردنِ یک حکمِ ترکیبیِ منطقی مراد می‌شود با آن‌چه اثبات‌کردن اجزا (اثبات‌کردن هر جزء) تلقی می‌شود توضیح می‌دهد. در این شرح **برهان ساختی** (constructive proof) و **روش ساختی** (constructive method) مفاهیمی اولیه‌اند. آندری کلموگروف، که یکی افراد در تفسیر BHK است، احکام را هم‌چون مسائل تفسیر می‌کند، که حل این مسائل وابسته به احکامِ ترکیبیِ منطقی است که آن را با استفاده از چیزی شرح می‌دهد که از حل‌کردن مسئله‌ای که اجزا ایجاد کرده‌اند مراد می‌شود. ارتباط این مطلب با صورت‌بندی هیتینگ چنین است: «حل‌کردن مسئله‌ای که وابسته به حکم *A* است» یعنی «اثبات‌کردن *A*» (Troelstra-Van Dalen 1999). هیتینگ در آن دسته مقالات خود که به صوری‌کردن می‌پرداختند جدول ارزش‌های بسیاری، برای مثال به‌منظور برقرارکردن ادات تعریف‌ناپذیر، معرفی کرده بود.

نویسندگان مقالهٔ «اکتشاف دلالت‌شناسی بث برای منطق شهودی» می‌نویسند: به‌علت ابهام در مفاهیم «برهان ساختی» و «عملیات ساختی» تفسیر BHK هرگز نتوانست آن وسیلهٔ همه‌کاره‌ای برای منطق شهودی باشد که جدول ارزش برای منطق کلاسیک بود.

تفسیر BHK هرگز چون دلالت‌شناسی، آن‌گونه‌که منطق کلاسیک داشت، برای منطق شهودی نبود (.ibid).

کریپکی درعین فاصله‌گرفتن از مفهومِ مبهمِ برهانِ ساختی، که پیشینیان وی بدان گرفتار بودند، با طرح چند مفهوم ساده هم‌چنان به اصولِ شهودگرایی برآوئر وفادار مانده است و از روش‌های توپولوژیکی اسلافش انعطاف بیش‌تری دارد و با به‌کارگیری مفاهیم فنیِ کم‌تر حاد، منطق‌دان را از رجوع به مطالعهٔ این رشته از ریاضیات مستغنی می‌کند؛ و ابزار منعطف‌تری برای اهداف ریاضیاتی است (Van Dalen 2001). این انعطاف باعث شده است تفسیر کریپکی ازیک‌سو به زبان طبیعی و ازسوی‌دیگر به دلالت‌شناسی منطق کلاسیک نزدیک‌تر و درنتیجه فهم و کاربری‌اش ساده‌تر باشد (Van Dalen 1997). مهم‌تر از همه این‌که طرح کریپکی هماهنگی و مطابقت تام با آن‌چه برآوئر دربارهٔ شهودگرایی می‌پنداشت دارد. صورت‌بندی اصل‌هایی که برآوئر آن‌ها را به‌شکل ضمنی رها کرده بود مدیون تلاش کریپکی و کرایسل است (فان آتن ۲۰۰۴). ازطرفی معرفت‌شناسی عمیقی پشت تفسیر دلالت‌شناسی منطق شهودی با جهان‌های ممکن منطق موجهات نهفته است. کریپکی هوشمندانه دریافت، بدون دست‌بردن در مفاهیم اولیه و ذاتی شهودی‌گرایی، می‌تواند منطق شهودی را به سیستم S4 موجهات ترجمه کند و از خاصیت متقارن بازتابی و تراگذری نیز بهره جوید.

مدل‌های بث (Evert Willem Beth) تفسیر دیگری برای دلالت‌شناسی منطق شهودی است. کریپکی در مقاله‌اش توجه ویژه‌ای به بث و مدل‌های وی نشان می‌دهد. بخش ۲.۱.۲ از مقاله‌اش با عنوان «ارتباط با مدل‌های بث» بحثی دربارهٔ ارتباط نظریهٔ مدلی که خودش مطرح کرده است با نظریهٔ مدل بث می‌گشاید. ابتدا او نشان می‌دهد که نظریهٔ مدلش در مشیی طبیعی می‌تواند به نظریهٔ مدل بث ترجمه شود. سپس نشان می‌دهد تفسیر شهودی از معرفی مدل‌سازی بث می‌تواند به دگرگونی از مدل تسویر او که پیش‌تر معرفی کرده است منجر شود (Kripke 1965). هرچند او این بخش را، بدون ازدست‌رفتن پیوستگی بحث، قابل‌چشم‌پوشی می‌داند.

مایکل دامت در *عناصر شهودگرایی* (Dummett 1977)، در فصل پنجم با عنوان «دلالت‌شناسی منطق شهودی»، بخش سوم با عنوان «فضاهای توپولوژیکی» درخت‌های کریپکی و هم‌چنین بث را معرفی می‌کند، اما تمایل واقعی او بر تفاسیر توپولوژیک برای دلالت‌شناسی منطق شهودی است. او ارتباط دیدگاه توپولوژیکی ـ سیستم ارزشی خود با درخت‌های کریپکی را چنین ترسیم می‌کند:

به‌جای درنظرگرفتن سیستم‌های ارزش‌دهی (که در بخش ۵.۱ معرفی کرده است) که از یک فضای PO متناهی به‌دست آمده است، می‌توانیم خودمان را به خانوادهٔ $\mathbb{K}$ محدود کنیم که شامل سیستم‌های ارزش‌دهیِ وابسته به شبکه‌های توپولوژیکی هیتیگ است که توسط فضاهای PO روی درخت‌های متناهی تولید شده‌اند. سیستم ارزش‌دهی وابسته به شبکه‌های توپولوژیکی هیتینگ را که توسط فضای PO تولید شوند $< S, \mathcal{J} >$، به‌طوری‌که $< S, \leq >$ یک درخت باشد، درخت کریپکی خوانند. بنابراین $\mathbb{K}$ خانوادهٔ تمام درخت‌های کریپکی متناهی است. واضح است که چون $\mathbb{K}$ زیرخانوادهٔ $\mathbb{F}$ است، بنابراین $\Gamma \vDash_{\mathbb{F}} A$ مستلزم $\Gamma \Vdash_{\mathbb{K}} A$ است. برای اثبات عکس باید نشان دهیم که هر وضعیتی که بتواند روی یک فضای PO متناهی تحت فضای شهودی معرفی شود می‌تواند به‌طور مساوی روی فضای PO به‌دست‌آمده از درخت متناهی نیز به‌خوبی معرفی شود (.ibid).

مشیِ دامت در اثرش تفسیر و نگاهی متفاوت به روش کریپکی است. او برای معرفی سیستم ارزش‌دهی از شکلی از مدل کریپکی استفاده می‌کند، ولی تصریحی به تفسیر کریپکی ندارد و نمی‌توان آن را هم‌چون اثری آموزشی و تحلیلی بر تفسیر دلالت‌شناسی کریپکی مطالعه کرد. نوشتهٔ دامت را می‌توان به‌منزلهٔ تفسیری نسبتاً مجزا برای دلالت‌شناسی منطق شهودی مطالعه کرد.

دیرک فان دالن و آ. س. تروئلسترا در اثر مشترک بسیار مهمشان (Troelstra and Van Dalen 1999)، *معرفی‌ای برای ریاضیات ساختی*، تمام تفاسیر ازجمله تفسیر کریپکی بر دلالت‌شناسی منطق شهودی را معرفی می‌کنند. فان دالن در سه اثر دیگرش، *منطق و ساختار* (1997)، مقالهٔ بلند «منطق شهودی» (2001)، و مقاله‌اش در کتاب *راهنمای منطق فلسفی* (2002)، با ویراستاری گبای (D. M. Gabbay) به‌زیبایی تفسیر کریپکی بر دلالت‌شناسی منطق شهودی را تقریر، توسیع، و تحلیل کرده است. کتاب گبای، استاد کالج پادشاهی لندن، با عنوان *بررسی‌های دلالت‌شناسانه بر منطق شهودی هیتینگ* (Gabbay 1981) از مطالعات مستقل درمورد سمنتیک منطق شهودی و نیز تفسیر کریپکی است. عمدهٔ محتوی این کتاب دربارهٔ بخش محمولی منطق شهودی است. فصل سوم این کتاب به دلالت‌شناسی منطق شهودی اختصاص دارد. او سه تفسیر از دلالت‌شناسی منطق شهودی ارائه می‌دهد و تفسیر کریپکی را کاربردی‌ترین تفسیر می‌داند که باقی تفسیرها به آن نزدیک‌اند.

اگرچه کریپکی در فضای فلسفی ـ منطقی ایران، به‌واسطهٔ ترجمه‌های نیکو و سخته و حجم بالای تألیفات ـ تحقیقات دانشگاهی، فردی شناخته‌شده است، ترجمهٔ این مقالهٔ او به زبان فارسی، علاوه‌بر تلاش کوچکی برای روشن‌کردن جزئی دیگر از این پیل[۱]، جهدی

برای پیش‌ترنهادن گامی در منطق شهودی و غنی‌ترکردن ادبیاتِ بسیار کم‌وسعت شهودگرایی در زبان فارسی است.

کریپکی در این مقاله بسیار به اثر آرند هیتیگ با عنوان *شهودگرایی: یک معرفی* (Arand Heyting 1956) وام‌دار است و واژه‌ها و اصطلاحات بسیاری را از آن اخذ کرده است. برای فهم بهتر، مطالعهٔ آن اثر مفید خواهد بود.

از استادم سرکارخانم دکتر نباتی، عضو محترم هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی، برای مطالعهٔ این ترجمه و تذکر برخی معادل‌ها تشکر می‌کنم.

۲. متنِ ترجمهٔ مقالهٔ سول کریپکی

تحلیل دلالت‌شناسانهٔ منطق شهودی I

سول. اِی. کریپکی

دانشگاه هاروارد، کمبریج، آمریکا

مقالهٔ حاضر یک نظریهٔ مدلِ دلالت‌شناختی برای منطق محمولات شهودی هیتینگ ارائه و هم‌چنین تمامیت آن سیستم را در نسبت با این مدل‌سازی اثبات می‌کند. نظریهٔ مدل و قضیهٔ تمامیت در (Kripke 1955) ارائه شده‌اند. دلالت‌شناسی‌ای که برای منطق موجهات در (Kripke 1955) معرفی کردیم و در (Kripke 1963a) و (Kripke 1963b) توسعه‌اش دادیم به‌علاوهٔ نگاشت آشنای [شناخته‌شدهٔ] منطق شهودی به سیستم موجهات S4 الهام‌بخش دلالت‌شناسی حاضر برای منطق شهودی شدند. درحقیقت در دلالت‌شناسی ما ممکن خواهد بود تا تمامیتِ منطق محمولی هیتینگ را با استفاده از نگاشت به S4 و نتایج (Kripke 1963a) و (Kripke 1963b) استنتاج کنیم. بااین‌حال ترجیح می‌دهیم که دلالت‌شناسی منطق شهودی را مستقل از سیستم S4 توسعه دهیم. چنین باور داریم که این روند ما را قادر می‌سازد که اطلاعات بیش‌تری از منطق شهودی به‌دست آوریم؛ ازقبیل نگاشت به S4، به‌عنوان نتیجه‌ای از آن.[۲] به‌علاوه توسعهٔ پرزحمت اخیر، که در (Kripke 1955) نیامده است، شامل این است: یک بیان از نمادسازی کوئن (Paul Joseph Cohen) از فورسینگ (Cohen 1963) در چهارچوبِ دلالت‌شناسی حاضر. علاوه‌بر ارائهٔ یک روندِ سهل[۳] تصمیم برای حساب گزاره‌های هیتینگ، بخش II نتیجه‌ای ارائه خواهد داد که در (Kripke 1955) نیست، اما در (Kripke 1962) بدان اشاره شده است:

تصمیم‌ناپذیریِ نظریهٔ تسویرِ شهودیِ تک‌موضعی. برهان برمبنای دلالت‌شناسی‌ای است که پیش‌ازاین توسعه داده شده است.

باید اشاره شود که بث (Evert Willem Beth) برای منطق گزاره‌های استزامی محض در (Beth 1962) بازکشفی از مدل‌سازی حاضر ارائه کرده بود؛ علاوه‌برآن برای تمام منطق گزاره‌های شهودی از نتایج دامت (Michael Anthony Eardley Dummett) و لمون (Edward John Lemmon) (Dummett 1958) یک مدل‌سازی معادل با مدل ما می‌تواند به‌دست آید.

اگرچه نتایج این مقاله به منطق شهودی اختصاص داده شده است، صرفاً به‌صورت کلاسیک به‌اثبات رسیده است، جز آن‌چه درادامه اشاره می‌شود. ازمنظر شهودی وضعیت اساساً با وضعیت نظریهٔ تمامیت بث (Beth 1957)، همان‌طورکه دیسون (Verena Esther Huber-Dyson) و کرایسل (Georg Kreisel) در (Dyson 1961) تحلیل کردند، یک‌سان است. خواننده‌ای که به برهان‌های معتبر شهودی علاقه‌مند است می‌تواند در (Dyson 1961) کنکاشی داشته باشد و تحلیل مشابهی را به نتایج حاضر اعمال کند. در پایین نشانه‌هایی ارائه خواهیم داد که (معتقدیم) برای خواننده‌ای که با (Dyson 1961) آشناست کافی خواهد بود تا چنان تحلیل‌هایی را انجام دهد. در روند این نشانه‌دادن‌ها برخی نتایج درمورد سیستم FC کرایسل را که ارتباط خویشاوندی با تم اصلی این مقاله دارند اثبات خواهیم کرد. به‌ویژه نشان خواهیم داد که حدس کوردا (Kuroda's conjecture) و اصل مارکو (Markov's principle) هردو را در FC می‌توان رد کرد.

برخی علامت‌گذاری‌هایی در سرتاسر این مقاله به‌کار می‌روند چنین‌اند: $P^n, Q^n, R^n (N \geq 0)$ حروف n ـ موضعی‌اند. یک حرف محمولی 0 ــ موضعی معمولاً «حرف گزاره(ای)» خوانده می‌شود. گاه و بی‌گاه بالانویسِ روی حرف محمولی نادیده گرفته خواهد شد به‌شرط‌این‌که‌این کار باعث ازدست‌رفتنِ وضوح نشود. ما از حروف $x, y, z, \dots$ با یا بدون زیرنویس برای متغیرها (یِ فردی) استفاده می‌کنیم. فرمول‌ها در حساب گزاره‌های شهودی با ادات مألوف $\neg$,$\supset$,$\vee$,$\wedge$ ساخته خواهند شد که با حروف گزاره‌ای به‌مثابهٔ یک فرمول اتمی شروع می‌شوند. در حساب محمولات نه‌تنها حروف گزاره‌ای، بلکه فرمول $P^n(x_1, \dots, x_n)$ اتمی در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین، فرمول در روشی معمول با استفاده از اداتی که هم‌اکنون ارائه شد و سورهای $(\exists x)$ و (x) ساخته می‌شوند. از $A, B, C, \dots$ برای فرمول‌های دل‌خواه حساب گزاره‌ها یا حساب محمولی، باتوجه‌به متن (context)، استفاده می‌کنیم؛ اگر بخواهیم در یک فرمول به متغیرهای آزاد

قطعی توجه کنیم برای چنان نمادسازی از $A(x_1, \dots, x_2)$ استفاده می‌کنیم. درنهایت فرض می‌گیریم که خواننده با معرفی استاندارد حساب گزاره‌ها و محمولی شهودی صورت‌بندی‌شدهٔ هیتینگ در 10 آشناست.

۱.۲ نظریهٔ مدل

یک ساختار مدل (model structure) (m. s.) (شهودی) را چنان تعریف می‌کنیم که یک سه‌تایی مرتب (G, K, R) باشد، به‌طوری‌که K یک مجموعه است، G یک عضو از K است و R یک رابطهٔ بازگشتی (reflexive) و متعدی/ تراگذر (transitive) روی K است.

یک مدل (شهودی) روی m. s. (G, K, R) یک تابع دوتایی $\emptyset(P, H)$ است، به‌طوری‌که P روی حروف گزاره‌ای دل‌خواه[۳] و H روی اعضای K گسترده شده است که محدودهٔ آن مجموعهٔ $\{T, F\}$ است و آن شرط زیر را ارضا می‌کند:

$$if\ \emptyset(P, H) = T\ and\ HRH'(H, H'\varepsilon K)$$
$$then$$
$$\emptyset(P, H') = T$$

روی مدل ارائه‌شدهٔ $\emptyset(P, H)$، می‌توانیم برای یک فرمول دل‌خواه A از حساب گزاره‌ها، با استقرا روی تعدادی از ادات منطقی در A یک ارزش $\emptyset(A, H)(= T\ or\ F)$ تعریف کنیم. اگر A هیچ اداتی نداشته نباشد، آن‌گاه یک حرف گزاره‌ای است و $\emptyset(A, H) = T\ or\ F$ به‌ازای هر H تعریف‌شده به‌حساب می‌آید. فرض بگیرید $\emptyset(A, H)$ و $\emptyset(B, H)$ تعریف شده‌اند، سپس چنین قرار می‌گذاریم:

a) $\emptyset(A \wedge B, H) = T \quad iff\ \emptyset(A, H) = \emptyset(B, H) = T; otherwise,$
$\emptyset(A \wedge B, H) = F.$

b) $\emptyset(A \vee B, H) = T \quad iff\ \emptyset(A, H) = T\ or\ \emptyset(B, H) = T; otherwise,$
$\emptyset(A \vee B, H) = f.$

C) $\emptyset(A \supset B, H) = T \quad iff\ for\ all\ H' \in K\ such\ that\ HRH', \emptyset(A, H') = F$
$or\ \emptyset(B, H') = T; otherwise\ \emptyset(A \supset B, H) = F.$

d)$\emptyset(\neg A, H) = T \quad iff\ for\ all\ H' \in K\ such\ that\ HRH', \emptyset(A, H) = F; otherwise,$
$\emptyset = (\neg A, H) = F$

توجه کنید شـرایط روی $\wedge\ and\ \vee$ دقیقـاً مشـابه شـرایط متنـاظر در شـرطی و فصـلی کلاسیک است؛ اما شرایط روی $\neg\ and\ \supset$ مشابه شرایط کلاسیک نیست.

چنین ساده‌تر است که با استقرا نشان بدهیم، به‌ازای هر $H, H' \in K$ به‌طوری‌کـه HRH'، اگر $\emptyset(A,H) = T$، آن‌گاه $\emptyset(A,H') = T$. این خاصیت برای حـرف‌هـای گـزاره‌ای فـرض گرفته شده است و برای فرمول‌های پیچیده‌تر که از عبارات (d) - (a) استفاده مـی‌کننـد نیـز تبعیت می‌کند.

توجه کنید که، به‌صورت شهودی، تعریف استقرایی‌ای که در این‌جا ارائـه شـد کارآمـد نیست، زیرا به‌صورتی واضح در عبارات (c) و (d) به اصل طرد شق ثالث تمایل دارد (برای مثال: در (d)، برای تمام H' خواه $\emptyset(A,H') = F$ یـا چنـین نیسـت). بنـابراین، بـه‌صـورت شهودی، بهترین حالت این خواهد بود که یک مدل $\emptyset$ را به‌مثابهٔ یک نگاشت از $\emptyset(A,H)$ در $\{T,F\}$ تعریف کنیم، به‌طوری‌که A روی یک فرمول دل‌خواه از حساب گـزاره‌هـا گسـترده شده است؛ و آن عبارات (d) - (a) را بـه همـان خـوبی ارضـا مـی‌کنـد کـه‌ایـن شـرط کـه $\emptyset(P,H) = T$ و HRH' دلالت مـی‌کننـد بـر $\emptyset(P,H') = T$. واضـح اسـت کـه از دیـدگاه کلاسیک این تعدیل مفهوم مدل را ذاتاً دست‌نخورده و تغییرنیافته باقی می‌گذارد.

ما فرمول A از حساب گزاره‌ها را معتبر می‌خوانیم، اگر و تنها اگـر بـه‌ازای هـر مـدل $\emptyset$ روی یـک مـدلْ سـاختار (G,K,R) باشـد: $\emptyset(A,G) = T$. یـک مـدل $\emptyset$ روی یـک m.s. (G,K,R) به‌طوری‌که $\emptyset(A,G) = F$ را یک مدلِ نقض برای A می‌خوانند.

برای بسط‌دادن مدل‌سازی به نظریهٔ تسویر یک سـاختارِ مـدلِ سـوری (q.m.s) تعریـف می‌کنیم تا یک مدلْ ساختار (G,K,R) هم‌راه با تابعی چونَ ψ (تابَع دامنه‌ای) باشد که روی K تعریف شده است؛ به‌طوری‌که $\psi(H)$ یـک مجموعـه‌ای غیرتهـی بـرای تمـام $H \in K$ و $\psi(H) \subseteq \psi(H')$ اگر $HRH'(H, H' \epsilon K)$ باشد.

(به‌صورت شهودی نیاز داریم تا $\psi(H)$ نه‌تنها تهی نباشد، بلکه دست‌کم یک عضو داشته باشد؛ البته یک نوع (species) می‌تواند، بدون داشـتن هـیچ عضـو معینـی کـه بتـوان آن را شناخت، تهی هم نباشد).

ما یک مدلِ مسـوّر $\emptyset$ را روی یـک q.m.s (G,K,R) تعریـف مـی‌کنـیم کـه یـک تـابع $\emptyset(P^n,H)$ باشدَ، به‌طوری‌که P^n روی حروف محمولی n ـ موضعی (به‌ازای تمام nها) و H روی اعضای K گسترده باشـد. اگـر $n = 0$ و $\emptyset(P^n,H) = T\ or\ F$ باشـد و اگـر $n \geq 1$ و $\emptyset(P^n,H)$ یک زیرمجموعه از ضرب دکارتی (Cartesian product) $[\psi(H)]^n$ باشد. دوبـاره

داریم: اگر HRH'، برای $n = 0$ و $\emptyset(p^n, H) = T$ ،$\emptyset(p^n, H') = T$. به‌ازای $n \geq 1$، بـه‌طـور مشابه داریم: اگر HRH' ، $\emptyset(p^n, H) \subseteq \emptyset(p^n, H')$. در نظر بگیرید:

$$U = \bigcup_{H \in K} \psi(H).$$

می‌توانیم برای یک مدل مسوّر ϕ، به‌ازای هر فرمول A از نظریهٔ تسـویر شـهودی، یـک ارزش $\phi(A, H) = T\ or\ F$ را به‌ازای هر $H \epsilon K$، درارتباط‌با یک تخصیص ثابت از اعضای U به متغیرهای آزاد فردی A تعریف کنیم. اگر A یک فرمول اتمی باشد، یا یک حرف گزاره‌ای P اســت کــه درایــن‌صــورت $\phi(P, H) = T\ or\ F$ داده شــده اســت، یــا یــک فرمــول $P^n(x_1, \dots, x_n), n \geq 1$ است. درمورد اخیر اعضای $a_1, \dots, a_n$ از U را تخصیص‌داده‌شده به $x_1, \dots, x_n$ در نظر بگیرید. آن‌گاه درمورد این تخصیص می‌توانیم تعریف کنیم:

$$\emptyset(P^n(x_1, \dots, x_n), H) = T \quad iff \;\; (a_1, \dots, a_n) \in \emptyset(P^n, H)$$

And

$$\emptyset(P^n(x_1, \dots, x_n), H) = F \quad iff \; (a_1, \dots, a_n) \notin \emptyset(P^n, H).$$

می‌توانیم در این تخصیص به فرمول‌های اتمی که ارائه شد، با استقرا، تخصیصی به فرمول پیچیده‌تری را بسازیم. فرض بگیرید $A(x_1, \dots, x_n, y)$ یک فرمول باشـد کـه اکثـر متغیرهـای استقرایی در $A(x_1, \dots, x_n, y)$ آزادند. حال در نظر بگیرید که درمورد هـر تخصـیص اعضـای U به $x_1, \dots, x_n, y$ به‌ازای هر H، یـک ارزش صـدق $\emptyset(A(x_1, \dots, x_n, y), H)$ تعریـف شـده اسـت. سـپس مـی‌تـوانیم بـرای $\emptyset((y)A(x_1, \dots, x_n, y), H)$ و $\emptyset((\exists y)A(x_1, \dots, x_n, y), H)$ ارزش‌هایی به‌شکل زیر بـه‌دسـت آوریـم. در نظـر بگیریـد کـه اعضـای $a_1, \dots, a_n$ از U بـه متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ اختصاص داده شده‌اند. آن‌گاه:

e) می‌گوییم $\square((\exists y)A(x_1, \dots, x_n, y), H) = T$، اگر و تنها اگر وجود داشته باشـد یـک $b \in \psi(H)$ به‌طوری‌کـه $\square(A(x_1, \dots, x_n, y), H) = T$ هرگـاه بـه $x_1, \dots, x_n$ تخصـیص داده شـود $a_1, \dots, a_n$ و بـه همـین ترتیـب بـه y تخصـیص داده شـود b، درغیـراین‌صـورت $\emptyset((\exists y)A(x_1, \dots, x_n, y), H) = F$.

f) می‌گوییم $\emptyset((y)A(x_1, \dots, x_n, y), H) = T$ است، اگر و تنهـا اگـر بـه ازای هـر $H' \in K$ به‌طوری‌که HRH'، $\emptyset(A(x_1, \dots, x_n, y), H') = T$ هرگـاه بـه $x_1, \dots, x_n$ تخصـیص داده شـود $a_1, \dots, a_n$ و به y عضوی چون b از $\psi(H')$؛ درغیراین صورت $\emptyset((y)A(x_1, \dots, x_n, y), H) = F$ است.

درنهایت، چنین می‌گوییم که اگر ارزش صدق $\emptyset(A,H)$ و $\emptyset(B,H)$ (به‌ازای هر $H \in K$) درمورد یک تخصیص به متغیرهای آزاد از A و B داده شده باشد، آن‌گاه ارزش‌های مطابق $\emptyset(A \wedge B,H), \emptyset(A \vee B,H), \emptyset(A \supset B,H), \emptyset(\neg A,H)$ باتوجه‌به دستورات (a) - (d) تعریف خواهد شد.

برای به‌دست‌آوردن یک تعریف شهودی مناسب از مدل، باید مجدداً شرایط داده‌شده را تعدیل کنیم و فرض بگیریم که مدل $\emptyset$، مثل مورد قبل، یک تابع $\emptyset(P^n,H)$ است که همراه با تابع $\emptyset(A,H)$، درمورد تخصیص ارائه‌شده از اعضای U به متغیرهای آزاد A، به $\emptyset(A,H)$ T یا F را تخصیص داده است و شرایط پیش‌گفته را ارضا می‌کند (برای مثال: هنگامی‌که x_i به $a_i(1 \leq i \leq n)$ تخصیص داده شده است، برقرار است $\emptyset(P^n(x_1,\ldots,x_n),H) = T$، اگر و تنها اگر $(a_1,\ldots,a_n) \in \emptyset(p^n,H)$). مجدداً، این تعریف اساساً به‌صورت کلاسیک با تعریف قبل معادل است.

باید به این مطلب توجه داشته باشیم که تمام نتیجه‌های بعدی معتبر خواهند ماند، اگر روا بداریم $\emptyset(P^n,H)(n \geq 1)$ زیرمجموعه‌ای از U^n باشد، به‌جای‌این‌که آن را به زیرمجموعه‌های $[\psi(H)]^n$ محدود کنیم. هم‌چنین ما نظریه را دست‌نخورده باقی خواهیم گذاشت، اگر در نظر بگیریم $\emptyset(A,H)$ تنها هنگامی تعریف می‌شود که متغیرهای آزاد A به اعضای $\psi(H)$ تخصیص داده شده باشند و درغیراین‌صورت تعریف‌نشده باقی بمانند.

۱.۱.۲ تفسیر شهودی

یک سه‌تایی (G,K,S)، که در آن K یک مجموعه است، $G \in K$ است، و S رابطه‌ای تعریف‌شده روی K است، یک درخت خوانده می‌شود، و G مبدأ (origin) نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر:

۱. هیچ $H \in K$ وجود نداشته باشد، به‌طوری‌که HSG؛

۲. به‌ازای هر $H \in K$ به‌جز G، یک $H' \in K$ منحصربه‌فرد وجود دارد، به‌طوری‌که $H'SH$؛

۳. به‌ازای $H \in K$ وجود دارد GS^*H، به‌طوری‌که S^* یک نیا (ancestral) از رابطهٔ S است (یعنی $H_1S^*H_2$، اگر و تنها اگر $H_1 = H_2$ یا $H_1S^nH_2$ به‌ازای چندین قوهٔ n از S).

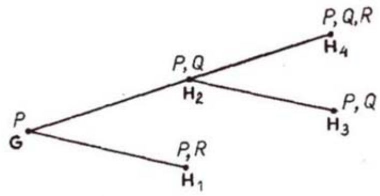
اگر باشد HSH' ، H را یک مقدم (predecessor) از H' و H' را یک تالی (successor) از H می‌خوانیم. درخت کران‌مند است، اگر و تنها اگر هر H فقط تعداد متناهی تالی داشته

باشد. عضو H بدون تالی را نقطهٔ پایان می‌خوانیم. توجه کنید که K می‌تواند بـا عبـارات S هم‌چون یک رشته از آن توصیف شود و G می‌تواند هم‌چون عضوی منحصربه‌فـرد بـدون مقدم از K توصیف شود (ایـن تعریـف از درخـت از (Kripke 1963a) اخـذ شـده اسـت. به‌علاوه، به‌صورت شهودی اعضای H باید اعداد طبیعی باشند و S تصمیم‌پذیر باشد).

یک m. s. (G, K, R) را یک درخت m. s. می‌خوانیم، اگر و تنها اگر یک رابطهٔ S وجـود داشته باشد، به‌طوری‌که (G, K, S) یک درخت باشد و R کوچـک‌تـرین رابطـهٔ انعکاسـی و متعدی باشد که در S وجود دارد (مثلاً $R = S^*$). در ملاحظات ما بر تفسیر شـهودی، ابتـدا به مدل‌های درختی توجه خواهیم کرد (مثلاً مـدل‌هـایی کـه روی درخـت m. s. (G, K, R) تعریف شده اند). درحقیقت، در بخش ۲.۱.۲ نشان خواهیم داد که هر مدل می‌تواند با یـک مدل درخت معادل جابه‌جا شود.

باقی این بخش شامل یک تفسیرِ شهودیِ صوری‌شده از مدل‌سـازی اسـت، هـم‌راه بـا نشان‌دادن این‌که چگونه تفسیر را با حدود نظریهٔ کرایسل (Kreisel 1958) مبنی‌بر دنباله‌هـای انتخاب کاملاً آزاد[۴] به‌صورت صوری‌تر بنویسیم. به خواننـده‌ای کـه بـا (Kreisel 1958) آشنا نیست یا به این جزئیات علاقه ندارد توصیه می‌کنیم می‌توانـد ملاحظـات مـرتبط بـا (Kreisel 1958) را نادیده بگیرد، اما بقیهٔ بخش را بخواند.

تفسیر چنین پیش می‌رود: فرض بگیرید یک مدل $\emptyset$ برای فرمول A از حساب گـزاره‌ای ارائه شده است که زیر فرمول‌های اتمی مفرد آن P, Q, R هستند. برای مثال فرض کنید یک مدل درختی $\emptyset$ روی m. s. (G, K, S) داریم که دیاگرامی به‌صورت زیر دارد:



شکل ۱.

اعضای K این‌ها هستند: G, H_1, H_2, H_3, H_4. ما یک فرمـول اتمـی بـالای گـرهٔ G یـا H_i نوشته‌ایم، اگـر $\emptyset$ در آن گـره بـدان ارزش T را تخصـیص دهـد؛ اگـر $\emptyset$ بـدان ارزش F را تخصـیص دهـد آن را حـذف مـی‌کنـیم. بنـابراین بـرای مثـال $\emptyset(P, G) = T$، درحـالی‌کـه $\emptyset(Q, G) = \emptyset(R, G) = F$.

ما گره‌های H را برای نمایندگی‌کردن نقـاطی در زمـان (یـا وضـعیت‌هـای آشکارسـاز (Evidential)) در نظر می‌گیریم، که در آن‌ها می‌توانیم اطلاعات مختلفی داشته باشیم. اگر در نقطهٔ معینی در زمانی هم‌چون H اطلاعات کافی‌ای برای اثبات‌کـردن یـک گـزاره چـون A داشته باشیم، می‌گوییم $\emptyset(A,H) = T$ است. اگر چنین اطلاعاتی نداشته باشـیم، مـی‌گـوییم $\emptyset(A,H) = F$. اگر $\emptyset(\mathrm{A},\mathrm{H}) = \mathrm{T}$، می‌توانیم بگوییم که گزارهٔ A در نقطهٔ H در زمـان تأییـد شده است و اگر $\emptyset(A,H) = F$، آن‌گاه گزارهٔ A در نقطهٔ H در زمان تأیید نشده است. توجه کنید که F و T نمایندهٔ صدق و کذب شهودی نیستند؛ اگـر $\emptyset(A,H) = T$، آن‌گـاه A بـرای این‌که بتواند در زمان H صادق باشد، تأیید شده است؛ اما $\emptyset(\mathrm{A},\mathrm{H}) = \mathrm{F}$ بدین معنی نیسـت که در H اثبات شده است که A غلط است. به‌سادگی چنین است که هنوز در H اثبات نشده است، اما می‌تواند در آینده برقرار شود.

حال، برای نقطهٔ ارائه‌شده در زمان G، تعداد گوناگونی احتمالات باز برای به‌دست‌آوردن اطلاعات بیش‌تری دربارهٔ گزاره‌ها وجود دارد. یک وضعیت به‌صورت دیاگرام در شـکل ۱ ترسیم شده است. ما در نقطهٔ G (که معرف اطلاعات فعلی ماسـت) P را اثبـات کـرده‌ایـم. به‌ازای تمام اطلاعاتی که می‌دانیم می‌توانیم برای زمان طولانیِ دل‌خواهیِ در G باقی بمـانیم (stuck)، بدون این‌که هیچ اطلاعات تازه‌ای به‌دست بیاوریم. اما ممکن است که ما اطلاعات کافی‌ای برای پریدن (jump) به نقطهٔ H_1 به‌دست بیاوریم (که در آن حالت، علاوه‌بر P، یـک برهان برای R خواهیم داشت)، یا به نقطهٔ H_2 (جایی که عـلاوه‌بـر P یـک برهـان بـرای Q خواهیم داشت)، یا حتی به نقطهٔ H_3 یا نقطهٔ H_4. اگر به نقطهٔ H_2 پریده باشیم، آن‌گاه هر دو P و Q را اثبات کرده‌ایم؛ آن‌گاه تاجایی‌که می‌دانیم ممکن است به نقطهٔ H_2 برای مدت زمان طولانی دل‌خواهی چسبیده باقی بمانیم. اما ممکن است به H_3 یا H_4 برویم. اگر ما به نقطـهٔ H_2 پریده باشیم، آن‌گاه هم P و هم Q را اثبات کرده‌ایم؛ آن‌گاه تاجایی‌که می‌دانیم می‌تـوانیم برای زمان طولانی دل‌خواهی در نقطهٔ H_2 باقی بمانیم. اما برایمان ممکن خواهد بود که بـه H_3 یا H_4 پیش برویم. توجه کنید که اگر به وضعیت H_3 برویم، هم‌چنان چیزی بیش‌تر از P و Q را اثبات نکرده‌ایم؛ اما این بدان معنی نیست که وضعیت H_3 دقیقاً مشـابه وضـعیت H_2 است. درحقیقت تازمانی‌که در H_2 باقی بمانیم این احتمال برای ما هنوز باز خواهد بود کـه در یک زمان یا زمان دیگر قادر باشیم به H_4 برویم و R را اثبات کنیم؛ اما اگـر در وضـعیت H_3 باشیم اطلاعات کافی برای بیرون‌نگه‌داشتن این گزینه را داریم که R اثبات خواهد شد.

حال به‌طور کلی در یک ساختار مدل (G,K,R) ما G را به‌مثابهٔ یک وضعیت آشکارساز تفسیر می‌کنیم. اگر H یک وضعیت باشد، می‌گوییم HRH'، اگر تاجایی‌که مـا مـی‌دانـیم در

زمان H ممکن باشد بتوانیم در آینده اطلاعاتی کافی برای جلورفتن تا H' بـه‌دسـت آوریـم. بنابراین ازآن‌جاکه اطلاعاتی که در H داریم ممکن است تمام دانسته‌هایی باشد که ما بـرای یک زمان طولانی دل‌خواه داریم، چنین فرض می‌گیریم که HRH؛ و خاصیت جابه‌جایی R به‌صورت شهودی روشن است. شرط موردنیاز برای‌این‌که به‌ازای هر A اگـر $\emptyset(A,H) = T$ و HRH' آن‌گاه $\emptyset(A,H') = T$ به‌سادگی بدین معنی است که اگر هم‌اکنون برهانی بـرای A در وضعیت H داشته باشیم، آن‌گاه می‌توانیم A را به‌مثابهٔ اثبات‌شده در هر وضعیت آتـی H' بپذیریم، که آن را فراموش نخواهیم کرد. درنهایت عبارت اسـتقرایی بـرای حسـاب گزاره‌ها با تفسیر شهودی از این مفاهیم هم‌صداست. بنابراین $A \wedge B[A \vee B]$ اثبات شـده است هنگامی‌که هر دو A و B اثبات شده باشند [خواه A اثبات شـده باشـد، خـواه B]؛ بنابراین $\emptyset(A \wedge B,H) = T$، اگـر و تنهـا اگـر $\emptyset(A,H) = \emptyset(B,H) = T$ [$\emptyset(A \vee B,H) =$ $T \;\; iff \;\; \emptyset(A,H) = T \; or \; \emptyset(B,H)$]. توجه کنید که برخـورد بـا فصـل و عطـف فـوق در وضعیت داده‌شدهٔ H آن‌چنان است که اگر تابع‌ارزش کلاسیک می‌بودنـد. ازطـرف‌دیگـر بـا نقض و استلزام نمی‌توان این‌چنین برخورد کـرد. بـرای بیـان $\neg A$ بـه‌صـورت شـهودی در وضعیت H، در H نه‌تنها باید بدانیم که A در H تأیید نشده است، بلکه مهم نیسـت چقـدر اطلاعات بیش‌تر به‌دست بیاید، در هیچ زمان آینده‌ای ممکـن نیسـت تأییـد شـود؛ بنـابراین می‌گوییم $\emptyset(\neg A,H) = T$، اگر و تنها اگـر $\emptyset(A,H') = F$ بـه‌ازای هـر HRH' s. t. $H' \in K$. مجدداً برای تأییدکردن $A \subset B$ در وضعیت H باید بدانیم، در وضـعیت آتـی H' کـه در آن برهانی برای A برهانی داریم، برای B نیز برهانی داریم. تعریف اسـتقرایی از $\emptyset(A \supset B,H)$ این شرط را صورت‌بندی می‌کند.

مدل نقض دو نقطهٔ زیر را به‌ازای اصل طرد شق ثالث در نظر بگیرید.

شکل ۲.

داریـــم $\emptyset(P,H) = T$ و $\emptyset(P,G) = F$. ازآن‌جـاکـه $\emptyset(P,H) = T$، $\emptyset(\neg P,G) = F$ و بنابراین $\emptyset(P \vee \neg P,G) = F$. به‌صورت شهودی در وضـعیت حاضـر G هنـوز P را اثبـات نکرده‌ایم و هم‌چنین نمی‌توانیم $\neg P$ را تأیید کنیم، زیرا این احتمال هست که در آینده بـرای پیش‌رفتن تا H اطلاعات کافی به‌دست بیاوریم و P را تأیید کنیم. بنابراین در نقطهٔ G مـا در وضعیتی نیستم که بتوانیم بگوییم: $P \vee \neg P$.

این ملاحظات می‌توانند به‌آسانی با حدود و جملات نظریهٔ کرایسل FC مبنی‌بر دنباله‌های انتخاب مطالقاً آزاد صورت‌بندی شوند. به‌صورت شهودی یک دنبالهٔ انتخاب مطلقاً آزاد (a.f.c.s) یک دنبالهٔ انتخاب آزاد چون α که از فضای آزاد S انتخاب شده است که در آن از ابتدا فرض گرفته شده است که هیچ محدودیتی، به‌جز شرایطی که S را تعریف می‌کنند، در انتخاب‌ها اثرگذار نیست.

پس شکل ۲، برای مثال، می‌تواند با جملات نظریهٔ حاضر چنین تفسیر شود: در نظر بگیرید a.f.c.s را از فضای S که شامل انتخاب‌های آزاد از صفرها و یک‌هاست که در آن دنبال 1 فقط می‌تواند 1 بیاید. به‌صورت شهودی ما وضعیت G را به‌مثابهٔ یک انتخاب 0 و H را به‌مثابهٔ انتخاب 1 تفسیر می‌کنیم. از G شروع می‌کنیم، بنابراین تا وقتی می‌خواهیم به G بچسبیم، اجازه داده‌ایم که 0 پشت‌سر یک عدد دل‌خواه از 0ها بیاید، همین‌طور 1ها. اما ازآن‌جاکه H فقط می‌تواند دنبال خودش بیاید ما اجازه داده‌ایم که دنبال 1 فقط 1 بیاید. سپس، $P(\alpha)$ این حکم است که «یک 1 در a.f.c.s α رخ می‌دهد» (برای مثال $(\exists n)(\alpha(n) = 1)$ به‌طوری‌که n روی اعداد طبیعی گسترده است). تازمانی‌که ما فقط 0ها را در α انتخاب کرده‌ایم، $P(\alpha)$ را برقرار نکرده‌ایم؛ اما ازطرف‌دیگر ازآن‌جاکه α بی هیچ محدودیتی، جز این‌که در S قرار دارد، انتخاب شده است، نمی‌توانیم احتمال انتخاب آتی یک 1 را طرد کنیم؛ بنابراین نمی‌توانیم بگوییم $\neg P(\alpha)$. این ملاحظات را برای به‌دست‌آوردن برهانی برای $\neg(\alpha \upharpoonright S)\big(P(\alpha) \vee \neg P(\alpha)\big)$، به‌طوری‌که $\alpha \upharpoonright S$ روی a.f.c.s در S گسترده است، می‌توان به‌سادگی در FC کرایسل صورت‌بندی کرد.

به‌طور کلی‌تر، در هر مدل درخت شمارش‌پذیر (که به‌صورت شهودی تعریف شده باشد) $\emptyset$ از A روی m.s. (G, K, R)، فرض بگیرید ما گره‌ها (اعضای K) را با اعداد طبیعی نشان می‌دهیم، که به‌طور خاص G را با صفر نشان داده شده است. با جملات (G, K, R) یک فضای S را شامل تمام دنباله‌هایی انتخاب آزاد که در آن انتخاب اولیه 0 است تعریف کنید و در آن انتخاب هر عدد طبیعی m باید یا با انتخاب آتی m یا با یک انتخاب از یکی از تالی‌های m روی درخت ادامه داده شود. برای هر زیرفرمول اتمی P از A و a.f.c.s α در S به یک فرمول $P(\alpha)$ وابسته می‌شود که خلاصهٔ این است: $(\exists x)(\exists m)(\alpha(x) = m$ و $\phi(P, m) = T$. B, C داده شده و فرمول‌های وابسته‌شان $B(\alpha)$ و $C(\alpha)$ که وابسته‌اند به $B \wedge C$، $B(\alpha) \wedge C(\alpha)$؛ با $B \vee C$، $B(\alpha) \vee C(\alpha)$ و غیره. سپس به‌سادگی با استقرا می‌توان دید که برای هر زیرفرمول B از A اگر $\emptyset(B, m) = T$ آن‌گاه $(\alpha \upharpoonright S)\big((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset$

$B(\alpha))$ و اگر $\emptyset(B,m) = F$ آن‌گاه $\neg(\alpha \upharpoonright S)((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset B(\alpha))$. به‌ویـژه، اگـر $\emptyset(B,G) = T[= F]$، آن‌گـاه ازآن‌جـاکـه هـر a.f.c.s در S شـامل $0(= G)$ اسـت، داریـم: $(\alpha \upharpoonright S)B(\alpha)[\neg(\alpha \upharpoonright S)B(\alpha)]$. اگر (G,K,R) .m.s و مدل $\emptyset$ بتواند به‌صـورت صـوری در FC کرایسل توصیف شود، استدلال قبل می‌توانـد در FC صـورت‌بنـدی شـود و بنـابراین بـه‌ویـژه اگـر $\emptyset(A,G) = F$، $\vdash \neg(\alpha \upharpoonright S)A(\alpha)$ در FC یـک مثـال نقـض بـرای اعتبـار A ارائه می‌کند.

برای بسط‌دادن این برخورد با سورها ابتدا مدل نقض زیـر را بـرای $(x)(P(x) \vee Q) \supset (x)P(x) \vee Q$ در نظر بگیرید:

شکل ۳

داریم $\emptyset(P(x),G) = \emptyset(P(x),H) = T$ هنگامی‌که a را به x تخصـیص مـی‌دهـیم؛ امـا $\emptyset(P(x),G) = \emptyset(P(x),H) = F$ هنگـامی‌کـه b را بـه x تخصـیص مـی‌دهـیم. بـه‌عـلاوه $\emptyset(Q,G) = F$، $\emptyset(Q,H) = T$، در GRH امـا نـه در HRG و $\psi(G) = \{a\}$، $\psi(H) = \{a,b\}$. تمام این اطلاعات درون دیاگرام هست. به‌سادگی مـی‌تـوان نشـان داد کـه $\phi((x)(P(x) \vee Q),G) = T$، اما $\emptyset((x)P(x) \vee Q,G) = F$. به‌صورت شهودی می‌توان وضـعیت را چنـین تفسیر کرد: اعضای a و b را به‌ترتیب با عدد صحیح 0 و 1 مشخص می‌کنـیم. R را قضـیهٔ آخر فرما (Fermat's last theorem) و Q را $R \vee \neg R$ در نظر بگیرید. V را گونه‌ای شامل 0 و اگر Q صادق باشد، شامل 1 در نظر بگیرید (یعنی $V = \{m | m = 0 \vee (m = 1 \wedge Q)\}$) و x را یک متغیر در نظر بگیرید که روی V گسترده شده است. $P(x)$ را حکمـی بـا $x = 0$ در نظـر بگیریـد. آن‌گـاه در وضـعیت حاضـر G مـی‌تـوانیم بگـوییم $V \subseteq \{0,1\}$ اسـت و $Q \;\; iff \;\; 1 \in V$؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که $(x)(P(x) \vee Q)$. اما تازمانی‌که به وضعیت H، جایی که قضیهٔ آخر فرما در آن قطعی شده است و بنابراین می‌توان در آن Q را تأیید کـرد، پیش نرفته‌ایم نمی‌توانیم بگوییم که $(x)P(x) \vee Q$.

توجه شود که باید اشاره کنیم $(x)(P(x) \vee Q). \supset .(x)P(x) \vee Q$ در هـر مـدل سـوری برقرار است، به‌طوری‌که $\psi(H)$ سازگار باشد.

بنابراین به‌طور کلی، اگر متغیرها در فرمول A روی دامنهٔ D گسترده باشند، آن‌گاه برای هر وضعیت H، $\psi(H)$ گونه‌ای از تمام افرادی است که، برمبنای اطلاعات موجود در H، داخل در D شناخته شده‌اند (بنابراین درمورد پاراگراف بالا در وضعیت حاضر G، $\psi(G)=\{0\}$؛ اما در H، Q که به‌اثبات رسیده است، $\psi(H)=\{0,1\}$. ازآن‌جاکه D شامل یک عضو می‌شود، و باید دست‌کم یک عضو از D را از ابتدا شناخته باشیم؛ بنابراین $\psi(G)$ باید شامل دست‌کم یک عضو باشد. محدودیتی که در آن HRH' باید بر $\psi(H)\subseteq\psi(H')$ دلالت کند، اکنون باید در تفسیر موردنظر مشهود باشد. در نظر بگیرید برای این‌که در وضعیت H بگوییم که به‌ازای هر عضو x از D، $P(x)$ صادق است نه‌تنها باید بدانیم، به‌ازای هر x در $\psi(H)$، $P(x)$ صادق است، بلکه باید بدانیم به‌ازای هر x که در آینده ممکن است وجودش در D به‌اثبات برسد نیز صادق است؛ یعنی به‌ازای هر x در $\psi(H')$ در HRH'؛ و این دقیقاً عبارت استقرایی برای تسویر کلی است. ازطرف‌دیگر، برای تأییدکردن وجود یک x در D به‌طوری‌که $P(x)$ صادق باشد نیاز داریم یک عضو چون x پیدا کنیم که همین حالا هم در D به‌اثبات رسیده باشد (یعنی داخل $\psi(H)$ باشد)، و به‌طوری‌که $P(x)$ صادق باشد؛ و این دقیقاً همان شروط موردنظر سور وجودی است.

این حقایق می‌تواند به‌شکلی صوری‌تر با جملات نظریهٔ دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد بیان شود. فرض کنید یک درخت m.s. قابل‌شمارش (که به‌صورت شهودی تعریف شده است) $(G.K.R)$ ارائه شده است که در آن U و بنابراین $\psi(H)$ به‌ازای هر H قابل‌شمارش است. سپس می‌توانیم هر دوی اعضای K و اعضای U را با اعداد طبیعی مشخص کنیم وبه‌ویژه G را با 0 مشخص کنیم. آن‌گاه به (G,K,R) یک فضای S از دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد که هم‌اکنون در بالا تعریف کردیم نسبت می‌دهیم. به‌علاوه، برای هر a.f.c.s، α در S، در نظر بگیرید D_α گونه‌ای از تمام اعداد طبیعی n باشد، به‌طوری‌که یک عدد طبیعی چون x وجود دارد، به‌طوری‌که $n\in\psi(\alpha(x))$. در نظر بگیرید x_α یک متغیر باشد که روی D_α گسترده شده است (یعنی $(x_\alpha)(...)$ باید چنین تفسیر شود $(x)(x\in D_\alpha\supset\cdots)$ و به همین طریق برای $(\exists x_\alpha)$). آن‌گاه ازآن‌جاکه $G=0=\alpha(0)$ و $\psi(G)$ شامل یک عدد طبیعی است، D_α به‌ازای تمام α یک عضو دارد. ϕ را یک مدل q (G,K,R) (که به‌صورت شهودی تعریف شده است) به‌ازای فرمول A در نظر بگیرید. برای هر زیرفرمول اتمی ارائه‌شدهٔ $P^n(x_1,\dots,x_n)$ و یک α a.f.c.s از S، ما به این دو یک جمله $P(\alpha,x_{1_\alpha},\dots,x_{2_\alpha})$ را نسبت می‌دهیم، به‌طوری‌که متغیرهای $x_{1_\alpha},\dots,x_{2_\alpha}$ روی D_α گسترده‌اند و $P(\alpha,x_{1_\alpha},\dots,x_{2_\alpha})$ بیان

مـی‌کنـد کـه بـه‌ازای m روی α، هنگـامی‌کـه x_{i_α} بـه متغیـر x_i نسـبت داده اسـت، $\phi(P^n(x_1, \dots, x_n), m) = T$؛ $(i = 1, \dots, n)$ توجـه کنیـد کـه $(x_{i_\alpha} \in D_\alpha \subseteq U$. فرمـول‌هـای دادهشـدهٔ $A(x_1, \dots, x_n)$ و $B(y_1, \dots, y_m)$ بـه‌ترتیـب وابسـته‌بـه $A(\alpha, x_{1_\alpha}, \dots, x_{n_\alpha})$ و $B(\alpha, x_{1_\alpha}, \dots, x_{m_\alpha})$، $A(x_1, \dots, x_n) \wedge B(y_1, \dots, y_m)$ به $A(\alpha, x_{1_\alpha}, \dots, x_{n_\alpha}) \wedge B(\alpha, x_{1_\alpha}, \dots, x_{m_\alpha})$ وابسته شده است و به همین ترتیب برای سایر ادات.

به‌علاوه، $(x_i)A(x_1, \dots, x_n)$ وابسته به $(x_{i_\alpha})A(\alpha, x_{1_\alpha}, \dots, x_{n_\alpha})$ است و به همین ترتیب درمورد سور وجودی. آن‌گاه ما با استقرا اثبات می‌کنیم که به‌ازای $m \in K$ اگر $A(x_1, \dots, x_n)$ فقط شامل متغیرهای آزاد فهرست‌شـده باشـد و بـه $x_1, \dots, x_n$ تخصـیص داده شـده باشـد $a_1, \dots, a_n \in \psi(m)$، آن‌گاه درمورد این تخصیص، اگر $\phi(A(x_1, \dots, x_n), m) = T[= F]$، در FC داریـــــم $(\alpha \restriction S)((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset A(\alpha, a_1, \dots, a_n))[\neg(\alpha \restriction S)((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset A(\alpha, a_1, \dots, a_n))]$. به‌ویژه اگر $m = 0 = G$، ازآن‌جاکه $(\alpha \restriction S)((\exists x)(\alpha(x) = 0))$ داریم $(\alpha \restriction S)A(\alpha, a_1, \dots, a_n)[\neg(\alpha \restriction S)A(\alpha, a_1, \dots, a_n)]$. بنابراین اگر A شامل متغیرهای آزاد نباشد و $\emptyset(A, G) = F$ در FC اثباتی خواهیم داشت که A به‌صورت کلی معتبر نیست.

توجه کنید برای ترجمهٔ مثالی که در FC ارائه شد، به‌طوری‌که B یـک فضـای دودویـی کامل است داریم:

a) $(\alpha \restriction B)(x)\left((\exists y)(\alpha(y) = x) \supset (x = 0 \vee (\exists y)(\alpha(y) = 1))\right)$

اما هم‌چنین

b) $\neg(\alpha \restriction B)\left((x)(\exists y)(\alpha(y) = x) \supset x = 0) \vee (\exists y)(\alpha(y) = 1)\right).$

بنابراین ما «قانون» $(x)(P(x) \vee Q). \supset .(x)P(x) \vee Q$ را رد کرده‌ایـم. هنگـامی‌کـه ایـن قانون برقرار باشد، برای هر دنبالهٔ انتخاب آزاد α برقرار خواهد بود که x روی تمام قطعات z، به‌طوری‌که $(\exists y)(\alpha(y) = z)$، عکس (a) و (b) گسترده است. توجه کنید که ازآن‌جـاکـه (a) بدیهی است و (b) از قضیه نرده به‌دست می‌آید، به‌سادگی می‌توانسـتیم بـه‌جـای FC از قضیهٔ معمولی دنبالهٔ انتخاب آزاد استفاده کنیم.

باتوجه‌به دیسون و کرایسل (1961)، اضافه می‌کنیم مدل‌هـای نقـض در FC، کـه شـرح دادیم و دنباله‌های نامتناهی معین از اعداد طبیعی به فرمول‌ها تخصیص می‌دهند، مـی‌تواننـد به‌صورت کلاسیک به‌مثابهٔ مدل نقـض در فضـای بئِیـر (René-Louis Baire) تفسـیر شـوند (فضای تمام دنباله‌های اعداد طبیعی هم‌راه بـا توپولـوژی معمـول). درحقیقـت بـا بررسـی

مدل‌های نقض که در پایین تولید شد، نتیجه گرفته می‌شود که هر فرمول اثبات‌نشـده یـک مدل نقض در مجموعهٔ کانتور دارد و دیسون و کرایسل نیز بر این مطلب تصریح کرده‌اند.

توجه کنید که ملاحظات زیر درمورد کاربرد دنباله‌های انتخاب آزاد به موضـوع اصـلی مقالهٔ حاضر مرتبط نیست، اما آن‌ها را در این‌جا خواهیم آورد:

۱. تمام قضیه‌هایی که در فصل آخر کتاب هیتینگ (Heyting 1956)، با اسـتفاده از روش دنباله‌های انتخاب آزاد برآوئر که وابسته به حل‌شدن مسئله است، اثبات شدند می‌تواننـد در FC نیز به‌سرانجام برسند. اولین مثالی را در نظر می‌گیریم که هیتینگ ارائه کرد: می‌خـواهیم نشان دهیم به‌ازای هر عدد حقیقی a باطل است که $a \neq 0$ دلالت کند به $a\#0$. فرض کنـیم صادق است، آن‌گاه برای هر دنبالهٔ انتخاب آزاد α در فضای دودویـی بـا اختصـاص اعـداد حقیقی به α خواهیم داشت:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \alpha(x)/2^x$$

می‌توانستیم نشان دهیم که $\neg(x)(\alpha(x) = 0) \supset (\exists x)(\alpha(x) = 1)$؛ بنابراین بـه‌ویـژه این برای دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد برقرار خواهد بود. اما، ساده اسـت در FC نشـان دهـیم کـه $(\alpha \restriction B)\neg(x)(\alpha(x) = 0)$؛ بنـابراین کـافی اسـت در FC نشـان دهـیم کـه $\neg(\alpha \restriction B)(\exists x)(\alpha(x) = 1)$. اما این مطلب به سادگی از قضیهٔ بادبزن نتیجه می‌شـود، زیـرا $(\alpha \restriction B)(\exists x)(\alpha(x) = 1)$ مستلزم $(\exists m)(\alpha \restriction B)(\exists x \leq m)(\alpha(x) = 1)$ خواهد بـود، کـه باطل است. رفتارهای مشابهی به‌ازای تمام تکذیبِ قضیه‌های کلاسیک که ازسوی هیتینـگ به این روش در (Heyting 1956) انجام گرفته است ممکن است.

چنین می‌پندارم محتمل است که این رفتار در FC به تمـام مثـال‌هـای نقـضِ قضـایای کلاسیک، که برآوئر برای روش خود ارائه می‌کند، بسط داده شود؛ اما من روی نوشته‌هـا و ادبیات بحث بررسی‌ای انجام نداده‌ام.

خوانندگان بادقتِ بخش حاضر که روی تفسیرِ مدل‌های ما مطالعه مـی‌کننـد پـذیرفتنی خواهند یافت که، به‌طور عکس، در یک سطح خوبِ از تفسیر، دست‌کم در حساب گزاره‌ها که هم‌اکنون در FC بیان کردیم، می‌توانست با استفاده از روش[۵] ips برآوئر وابسـته بـه حـل مسئله نیز به‌انجام برسد؛

۲. مثال زیر، که هر دو حدس کوردا (بنگرید به Kuroda 1951) و اصل مارکوف (بنگرید به Markov 1954) را در FC رد می‌کند، از اعمال‌کردن روش‌های بخـش حاضـر بـه‌منظـور

به‌دست‌آوردن مدل نقض برای $(x)A(x)\neg\neg \supset (x)\neg\neg A(x)$ الهام گرفته است. S را یک فضای متناهی شامل تمام دنباله‌های انتخاب آزاد α در نظر بگیرید، به‌طوری‌که به‌ازای هر x، $\alpha(x+1)=\alpha(x)$ یا $\alpha(x+1)=\alpha(x)+1$. در FC نشان می‌دهیم:

a) $(\alpha \upharpoonright S)(m)\neg\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$

b) $(\alpha \upharpoonright S)\neg(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$

برای اثبات a، در نظر بگیرید α یک a.f.cs در S باشد و m را یک عدد صحیح در نظر بگیرید و به‌عنوان برهان خلف فرض کنید $\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. حال ازآن‌جاکه α کاملاً آزاد است از اصل موضوع ۵.۱ در FC، قطعهٔ اولیه[۶] $\bar{\alpha}(x)$ از α وجود دارد، به‌طوری‌که $(\beta \upharpoonright S)\left(\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x) \supset \neg(\exists n)(\bar{\beta}(n) \geq m)\right)(*)$. حال $\alpha(x)<m$ درغیراین‌صورت $(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. بنابراین ازآن‌جاکه هر ips در S غیرنزولی است (نزولی نیست)، به‌ازای تمام $y<x$، $\alpha(y)<m$. حال $(*)$ بیان می‌کند که اگر ما x را از اولین اجزای β انتخاب کرده باشیم، بنابراین $\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x)$ و هرگز نمی‌توانیم به‌ازای هر n انتخاب کنیم $\bar{\beta}(n) \geq m$. اما از اصل موضوع ۵.۳ از FC داریم، وجود دارد βای a.f.c.s در S که شروط $\beta(x+i)=\alpha(x)+i(0 \leq i \leq m-\alpha(x))$ و $\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x)$ را ارضا می‌کند، زیرا این دنبالهٔ متناهی از انتخاب‌ها با قانون فضای S در توافق است. اما آن‌گاه اگر $n=x+m-\alpha(x)$، برخلاف $(*)$، $\beta(n)=m$.

برای اثبات b، در نظر بگیرید که α یک a.f.c.s در S باشد و به‌عنوان برهان خلف فرض کنید که $(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. آن‌گاه مجدداً با اصل موضوع ۵.۱ از FC داریم، وجود دارد یک x به‌طوری‌که $(\beta \upharpoonright S)\left(\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x) \supset (m)(\exists n)(\bar{\beta}(n) \geq m)\right)(**)$. هر a.f.c.s ارائه‌شده در S، بدین ترتیب، یک ارزش به $f(\beta)$ اختصاص می‌دهد: اگر $\bar{\beta}(x) \neq \bar{\alpha}(x)$، در نظر بگیرید $f(\beta)=0$؛ اگر $\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x)$ در نظر بگیرید $f(\beta)$ کم‌ترین n باشد، به‌طوری‌که $\beta(n) \geq \alpha(x)+1$. از $(**)$ داریم f برای همهٔ آن βها خوش‌تعریف است، بنابراین از قضیهٔ بادبزن داریم عدد صحیحی چون p وجود دارد، به‌طوری‌که $f(\beta)$ به‌صورت کامل توسط $\bar{\beta}(p)$ متعین شده است. بنابراین می‌توانیم $f(\beta)$ را چنین بنویسیم: $f\left(\bar{\beta}(p)\right)$. واضح است که از تعریف f داریم $p \geq x$. حال، باز هم با استفاده از اصل موضوع ۵.۳ از FC β را با گفتن این‌که $\bar{\beta}(x)=\bar{\alpha}(x)$ چنین متعین می‌کنیم $(x+i)=\alpha(x)\ (0 \leq i \leq p-x)$. آن‌گاه $(**)$ بیان می‌کند که $\left(f\left(\underline{\beta}(P)\right)\right) \geq (x)+1$. اما آشکار است که‌این باطل است، زیرا از اصل موضوع ۵.۳ می‌دانیم کاملاً آزادیم تا انتخاب را

تا $(p + j) = \alpha(x)\left(0 \leq j \leq f\left(\bar{\beta}(p)\right) \dots p\right)$ پیش ببریم، به‌طوری‌که با درنظرگرفتن $j = f\left(\bar{\beta}(p)\right) - p$ به‌دست می‌آوریم: $\beta\left(f\left(\bar{\beta}(p)\right)\right) = \alpha(x) < \alpha(x) + 1$. بنابراین b اثبات شده است.

حال از a و b استفاده می‌کنیم تا فرض کوردا (Kuroda 1951) و اصل مارکوف (Markov 1954) را رد کنیم. فرض کوردا می‌گوید که به‌ازای هر متغیر عددی m داریم: $(m)\neg\neg A(m)$ که مستلزم $\neg\neg(m)A(m)$ است. با استفاده‌کردن از فرض کوردا از a می‌توانیم $(\alpha \upharpoonright S)\neg\neg(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$ را نتیجه بگیریم، که مستقیماً با b در تناقض است؛ بنابراین فرض کوردا درFC قابل‌ردکردن است. به‌طور مشابه، اصل مارکوف می‌گوید که برای محمول تصمیم‌پذیر $A(x)$ و متغیرعددی n، $\neg\neg(\exists n)A(n)$ دلالت می‌کند بر $(\exists n)A(n)$. اما اگر $A(n)$ را بگیریم $\alpha(n) \geq m$، آن‌گاه $A(n)$ بازگشتی اولیه است و بنابراین تصمیم‌پذیر است. آن‌گاه اصل مارکوف به ما اجازه می‌دهد که از a نتیجه بگیریم: $(\alpha \upharpoonright S)(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$، که دوباره با b متناقض است.

اگرچه بنابر برهان‌های گودل و کرایسل تمامیتِ قویِ حسابِ محمولیِ هیتینگ دلالت بر صورت‌های معین از اصل مارکوف دارد، من متوجه نیستم که چگونه می‌توان این نتایج را به یک برهان در FC تبدیل کرد، مبنی‌براین‌که حساب محمولی هیتینگ به‌صورت قوی کامل نیست، و تردید دارم که چنین تبدیلی درحقیقت ممکن باشد. اگر S' فضایی شامل تمام αها باشد، به‌طوری‌که یک β در S چنان وجود داشته باشد که $(x)(\alpha(x + 1) = (\beta(x))$، آن‌گاه ساده است از نتایج حاضر نتیجه بگیریم که $(\alpha \upharpoonright S')\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq \alpha(0))$ و $\neg(\alpha \upharpoonright S')(\exists n)\left(\alpha(n) \geq \alpha(0)\right)$؛ اما به‌دلیل‌این‌که در این‌جا α روی دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد از S' و نه دنباله‌های انتخاب عادی گسترده است، قادر نیستیم قضیهٔ ۱ از کرایسل (Kreisel 1962) را برای نتیجه گرفتن این‌که حساب محمولات هیتینگ به‌صورت قوی کامل نیست به‌کار بریم.

۲.۱.۲ ارتباط با مدل بث

در این بخش رابطهٔ نظریهٔ مدل حاضر با نظریهٔ مدل بث (Beth 1957) را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد مدل‌های حاضر می‌توانند به‌صورت طبیعی به مدل‌های بث ترجمه شوند. با استفاده از یک تفسیر شهودی برای مدل سازی بث، نشان خواهیم داد که نگاشت به تفسیری از مدل سوریِ خود ما منتهی خواهد شد که خود تغییری است بر آن‌چه در فصل پیش مطرح شد. در این تفسیر متغیرها همواره روی قطعاتی از اعداد طبیعی گسترده می‌شوند.

این بخش می‌تواند، بدون ازدست‌رفتن پیوستگی، نادیده گرفته شود.[۷]

۳.۱.۲ تفاسیر دیگری از مدل‌ها

در بخش ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ تفاسیرهایی از مدل‌های ما ارائه شد. این تفاسیر به‌نوعی متعیّن شده بودند که با تفاسیری که شهودگرایان به‌طور عادی از ادات منطقی‌شان دارند مطابق باشد. در بخش حاضر دو تفسیر صوری از مدل‌سازی ارائه خواهیم کرد که ادعای هیچ‌گونه محتوای مستقیم شهودی ندارند (هر دو تفسیر درواقع نمونه‌های خاص مستقیمی از مدل‌سازی‌اند؛ آن‌ها به‌سادگی یک کلاسِ محدود از مدل‌ها را در نظر می‌گیرند). یک تفسیر مبتنی‌بر اثبات‌پذیری در سیستم‌های صوری است؛ این مطلب به‌طور خلاصه در (Kripke 1963b) شرح داده شده است. تفسیر بعدی مبتنی‌بر ایدهٔ فورسینگ (forcing) پل کوئن (Paul Joseph Cohen) است (Cohen 1963). این دو تفسیر به‌طور نزدیکی به هم وابسته‌اند. این بخش نیز بدون ازدست‌رفتن پیوستگی می‌تواند نادیده گرفته شود.

اول) تفسیر مبتنی‌بر اثبات‌پذیری

در نظر بگیرید E_0 یک سیستم صوری و E بسط دل‌خواهی از آن باشد. K را مجموعهٔ تمام چنان Eهایی در نظر بگیرید. ERE' برقرار است، اگر و تنها اگر E' یک بسط از E باشد. ما فرمول اتمی P را چنان تعریف می‌کنیم که یک wff از E_0 باشد (توجه کنید که لزومی ندارد P یک فرمول اتمی از E_0 باشد). آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از ادوات $\wedge, \supset, \neg, \vee$ از P فرمول‌های غیراتمی بسازیم. اگر تعریف کنیم که $\phi(P,E) = T$، اگر و تنها اگر P در E اثبات‌پذیر، درغیراین‌صورت در F اثبات‌پذیر باشد، آن‌گاه $\phi(P,E)$ یک مدل روی m. s. (E_0, K, R) است. بنابراین برای هر فرمول مختلط A که قضیه‌ای از حساب گزاره‌ای شهودی است داریم $\phi(A, E_0) = T$. اگر E_0 نظریهٔ اعداد مقدماتی Z و P فرمول تصمیم‌ناپذیر گودل باشد، آن‌گاه داریم $\emptyset(P \vee \neg P, E_0) = F$ به‌ازای این‌که P در E_0 اثبات‌پذیر نباشد اما در بسط مشخصی از E اثبات‌پذیر باشد. این‌که باتوجه‌به این انتخابِ خاص از E آیا حساب گزاره‌ای هیتینگ تمام است یا نه سؤال بزرگ‌تری است که هم‌چنانْ گشوده می‌ماند.

برای تفسیر نظریهٔ تسویر شهودی بدین مشی باید فرض بگیریم که سیستم E_0 و بسط‌های آن واجد مفاهیمِ «متغیرهای آزاد» و «ثابت‌ها» هستند و خود آن E_0 دست‌کم شامل یک ثابت است. به‌ازای هر $E \in K$ در نظر بگیرید $\psi(E)$ مجموعهٔ تمام ثابت‌های E باشد.

آن‌گاه اگر ERE' داریم $\psi(E) \subseteq \psi(E')$. به‌ازای هر n یک محمول اتمی nـ موضعی چون P^n تعریف کنید که فرمولی باشد از E_0 با n تا متغیر آزاد، هم‌راه با یک تابع $1-1$ از اعداد صحیحِ $1,\dots,n$ به متغیرهای آزاد از P^n. متغیری که توسط این تابع به $m(1 \leq m \leq n)$ اختصاص داده شد mـ امین متغیر آزاد از P^n خوانده می‌شود. به‌ازای $n \geq 1$ مجموعهٔ $\emptyset(P^n, E) \subseteq [\psi(E)]^n$ را چنین تعریف می‌کنیم: یک nـ تاییِ $(a_1,\dots,a_n)$ از ثابت‌ها در $\psi(E)$ داخل در $\emptyset(P^n, E)$ خواهد بود، اگر و تنها اگر نتیجهٔ جای‌گزینیِ متقارن $a_i(1 \leq i \leq n)$، به‌ازای iـ امین متغیر آزادِ P^n، یک قضیه از E باشد. بیرون از محمول‌های n–موضعی اتمی (که نقش حروف محمولی nـ موضعی را در بالا بازی می‌کنند)، می‌توانیم با استفاده از ادوات گزاره‌ای و سورها فرمول‌های پیچیده‌تری بسازیم.

آشکار است که در مقدم K می‌تواند با زیرمجموعه‌ای از آن چون K' جای‌گزین شود. (برای مثال بسط‌های اصل‌موضوع‌پذیر متناهی از E_0). به‌علاوه قیدها، مانند شمارش‌پذیری بازگشتی، که در مفهوم سیستم صوری‌اند، می‌توانند بنابر صلاح‌دید نادیده گرفته شوند. هم‌چنین گونه‌ای از تفسیر حاضر از حساب محمولی هیتینگ شبیه‌تر به «نظریهٔ مدل» وجود دارد که این فرض را که E باید شامل ثابت‌ها باشد حذف می‌کند. علاوه‌براین، تفسیر می‌تواند در جهات دیگری نیز بسط یابد تا از بخش‌های بزرگ‌تر ریاضیات شهودی تفاسیر تازه‌ای به‌بار بیاورد؛ به‌ویژه می‌توانیم تفسیری از FC ارائه دهیم تا به این برهان برسیم که FC یک بسط ضروری/ ذاتی از شهودگرایی و منطق‌های موجه است (بنگرید به Kripke 1963b).

دوم) مفهوم فورسینگ کوئن

در نظر بگیرید D یک مجموعهٔ نامتناهی قابل‌شمارش دل‌خواه باشد. $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ یک زوج متناهی از زیرمجموعه‌های از هم جدای D و K مجموعهٔ تمام چنان زوج‌هایی باشد. اگر $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ و $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}'_1)$ در K باشند، برقرار است $\mathcal{P}R\mathcal{P}'$ (یا $\mathcal{P}'$ یک بسط است $\mathcal{P}$ است)، اگر و تنها اگر $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}'_0$ و $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}'_1$. به‌علاوه در نظر بگیرید $\psi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$. حال یک محمول‌نشانه مفرد تک‌موضعی چون P را در نظر بگیرید. به‌ازای هر $\mathcal{P} \in K$ تعریف می‌کنیم $\phi(P, \mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$. در نظر بگیرید K' مجموعهٔ تمام $\mathcal{P} \in K$ باشد، به‌طوری‌که $\psi(\mathcal{P})$ ناتهی باشد. آن‌گاه به‌ازای هر $\mathcal{P} \in K'$، $(\mathcal{P}, K', R)$ یک q.m.s با دامنهٔ تخصیص‌داده‌شدهٔ تابع ψ باشد (اگر حساب محمولی هیتینگ را تعدیل کرده باشیم، آن‌گاه وجود دامنهٔ تهی را روا داشته‌ایم و بنابراین اجازه داده‌ایم $\psi(\mathcal{P})$ تهی باشد، به همین

نسب استفادهٔ قراردادی از K' به‌جای K می‌تواند نادیده گرفته شـود)، آن‌گـاه $\emptyset$ یـک مـدل روی $(\mathcal{P}, K', R)$ است، و به‌ازای هر فرمول A که با استفاده از ادات و سورهای گزاره‌ای از P ساخته شده است، تعاریف استقرایی‌ای کـه ارائـه کـردیم ارزش صـدق بـرای $\phi(A, \mathcal{P}')$ به‌ازای هر $\mathcal{P}' \in K'$ درارتباط‌با یـک تخصـیص ثابـت از اعضـای D بـه متغیرهـای آزاد A تعریف می‌کنیم. اگر این ارزش T باشد می‌گوییم درارتباط‌با این تخصیص $\mathcal{P}'$ فورس می‌کند A را (توجـه کنیـد کـه ارزش $\phi(A, \mathcal{P}')$ بـه‌وضـوح از انتخـاب عضـو «تعیـین‌شـدهٔ» $\mathcal{P}$ از $(\mathcal{P}, K', R)$ مستقل است).

اگر D' زیرمجموعه‌ای از D باشد می‌گوییم $\mathcal{P}'$ با D' در توافق اسـت، اگـر و تنهـا اگـر $\mathcal{P}'_0 \subseteq D'$ و $\mathcal{P}'_1 \subseteq D - D'$. می‌توانیم بگوییم D' فورس می‌کند A را (درارتباط‌با تخصیص به متغیرهای آزاد) اگر و تنها اگر وجود داشته باشد یک $\mathcal{P}' \in K'$ که در توافق با D' باشد و A را فورس کند. توجه کنید که اگر $\mathcal{P}'$ و $\mathcal{P}''$ با D' در توافق باشند، آن‌ها یک بسط مشترک دارند که با D' در توافق است. بنابراین به‌راحتی نتیجه می‌شود که D' نمی‌تواند یـک حکـم هم‌راه با نقیضش را فورس کند.

D' را عمومی (generic) می‌خوانیم، اگر و تنها اگر به‌ازای هر A و تخصـیص ثابـت بـه متغیرهای آزاد آن D' خواه A خواه $\neg A$ را فورس کند. کوئن اثبات می‌کند که مجموعه‌های عمومی وجود دارند: در نظر بگیرید: $\{A_n\}$ یک شمارش (Enumeration) از تمام دوتایی‌های مرتب (ordered couples) $A_i\langle B_i, \theta_i\rangle$ باشد، به‌طوری‌که B_i فرمولی است که از P ساخته شده است و θ_i یک تخصیص به متغیرهای آزاد آن است. یک دنبالـه چـون $\mathcal{P}^n = (\mathcal{P}_0^n, \mathcal{P}_1^n)$ را چنین تعریف کنید: $\mathcal{P}^0$ یک زوج تهی است. $\mathcal{P}^{n+1}$ یک بسط از $\mathcal{P}^n$ است که B_n را فورس می‌کند (درارتباط‌با θ_n) به‌شرطی‌که چنین بسطی وجود داشته باشد؛ درغیراین‌صورت وجود دارد $\mathcal{P}^n$. سپس آشکار است که $\mathcal{P}^{n+1}$ (درارتباط‌با θ_n) فـورس مـی‌کنـد B_n یـا $\neg B_n$ را و $D' = \cup\, \mathcal{P}_0^n$ عمومی است.

می‌گوییم $\mathcal{P}'$ به‌صورت ضعیف A را فورس می‌کند، اگر و تنها اگر $\neg\neg A$ را فورس کند. با توجه‌کردن به (یا پیش‌بینی) این‌که تمام فرمول‌هـای اثبـات‌پـذیر در حسـاب محمـولات هیتینگ در نظریهٔ مدل ما معتبرند به این نتیجه می‌رسیم که هر فرمول اثبات‌پذیری چـون A از حساب محمولات هیتینگ به‌وسیلهٔ هر $\mathcal{P}' \in K'$ فورس شده‌اند. به‌خوبی می‌دانیم اگـر A شامل سورهای کلـی نباشـد و بـه‌صـورت کلاسـیک معتبـر باشـد $\neg\neg A$ نیـز در حسـاب محمولات هیتینگ اثبات‌پذیر است. بنابراین، برای A کلاسیک معتبر و بدون سور کلـی، A به‌صورت ضعیف به‌وسیلهٔ هـر $\mathcal{P}' \in K'$ فـورس شـده اسـت. بـه‌عـلاوه توجـه کنیـد کـه

فرمول‌هایی که به‌وسیلهٔ یک $\mathcal{P}' \in K$ فورس می‌شوند (به‌صورت ضعیف فورس می‌شوند) تحت وضع مقدم (modus ponens) بسته‌اند: $A, A \supset B/B$.

اگر D' عمومی باشد و $\neg\neg A$ را فورس کند، باید به‌وضوح A را فورس کند؛ بنابراین یک D' عمومی ناتهی هر فرمول کلاسیک معتبر را که شامل سورهای کلی نباشد فورس می‌کند. کوئن یک مطلب، حتی قوی‌تر، را اثبات کرد: **اگر $\mathbf{D'}$ عمومی باشد و $\mathbf{A}$ هیچ سور کلی نداشته باشد آن‌گاه (درارتباطبا یک تخصیص به متغیرهای آزاد) $\mathbf{A}$ توسط $\mathbf{D'}$ فورس شده است، اگر و تنها اگر صادق باشد، هنگامی‌که سورهای وجودی (که گسترده‌شده برروی $\mathbf{D}$ در نظر گرفته شوند) و ادوات گزاره‌ای به‌صورت کلاسیک تفسیر شوند و "$\mathbf{P(x)}$" به‌صورت $\mathbf{x \in D'}$ تفسیر شود.** این تصدیق به‌سادگی با استقرا روی اختلاط (complexity) A اثبات می‌شود. اگر به‌صورت کلاسیک بگوییم، ازآن‌جاکه یک (x) همواره می‌تواند با $\neg(\exists x)\neg$ جای‌گزین شود، این قید که سورهای کلی باید غایب باشند اهمیتی ندارد.

تعریفی که ما ارائه کردیم در جنبه‌هایی غیرذاتی با تعریف کوئن تفاوت دارد (این تعریف ممکن است به تعریفی که فیفرمان (Feferman) ارائه داده است نزدیک‌تر باشد، ولی ما آن را بررسی نکرده‌ایم). واضح است که‌ایده می‌تواند بسط یابد. برای مثال، لازم نیست با یک محمول مفرد چون $P(x)$ سروکار داشته باشیم؛ ما می‌توانیم با چندین چنان‌هایی سروکار داشته باشیم و لزومی ندارد همهٔ آن‌ها تک‌موضعی باشند. تعدیل‌های موردنیاز برای چنین وضعیت عمومی‌تر باید واضح باشند. به‌علاوه می‌توانیم مجموعهٔ شمارش‌پذیر D را با یک مجموعه از کاردینالیتی عادی (regular cardinality) $\aleph_a$ جای‌گزین کنیم؛ K شامل زوج‌های مجزا از مجموعه‌های کاردینالیتی کوچک‌تر از $\aleph_a$ خواهد بود.

انگیزهٔ کوئن به‌طور اساسی با انگیزهٔ ما تفاوت دارد؛ اما آشکار داشت که‌ایدهٔ وی دقیقاً به نظریهٔ مدل ما مربوط است. ادلهٔ عمیق‌تر برای این ارتباط احتمالاً هنوز شناخته نشده‌اند.

باید اشاره کنیم که دانا اسکات (Dana scott) قبلاً ملاحظه کرده است که‌ایدهٔ کوئن شبیه به تفسیری است که کرایسل حدس زده بود (Kreisel 1961). و درواقع اگر صحت حدس کرایسل اثبات شود، تفسیر او از شهودگرایی ارتباط نزدیکی با تفسیر ما خواهد داشت.

۲.۲ دلالت‌شناسی نمودارها (tableaux)[۸]

در این بخش دلالت‌شناسی نمودارهای بث را برای منطق شهودی توسعه می‌دهیم. ایده‌ای که در این‌جا توسعه می‌یابد شبیه ایده‌های (Kripke 1963a) و (Kreisel 1958) است، که

درصورت تمایل می‌تواند به‌مثابهٔ پس زمینه مطالعه شود. در هـر گـام از سـاختمان بـا یـک سیستم از مجموعه‌های بدیلِ (alternative) نمودارها سـروکار داریـم؛ هـر مجموعـهٔ بـدیل به‌صورت یک درخت مرتب شده است و بـه مبـدأ هـر درخـت نمـودار (tableau) اصـلی مجموعه می‌گوییم. به روابطِ به‌صورت درختـی مرتـب‌شـده روی یـک مجموعـهٔ بـدیل S می‌گوییم. کوچک‌ترین رابطهٔ برگشـتی و متعـدی شـامل S را R مـی‌خـوانیم. در هـر گـام داده‌شده در ساختمان می‌توانیم فرض بگیریم که هر مجموعهٔ بدیل روی قطعـه‌ای از کاغـذ ترسیم شده است؛ متناظر با سیستم تمامی مجموعه‌های بدیل در آن گام، یک دفترچه داریم که صفحات آن ورقه‌های جداگانه‌ای از کاغذند.

برای بررسی اعتبار فرمول داده‌شدهٔ A از حساب محمولات هیتینگ، تلاش می‌کنیم یک مدل نقض برای A بیابیم. اگر A صـورت $A_1 \wedge \dots A_m . \supset . B_1 \vee \dots B_n$ داشـته باشـد، آن‌گـاه چیزی که نیاز داریم یک مدل $\emptyset$ است، به‌طوری‌که درارتباطبا تخصیص به متغیرهای آزاد A، $\emptyset(A_i, G) = T$ و $\emptyset(B_j, G) = F$، به‌طوری‌کـه $1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$. مـا وضـعیت را بـا قراردادن $A_1, \dots, A_n$ در سمت چپ و $B_1, \dots, B_n$ در سمت راستِ نمودار اصـلیِ سـاختمان معرفی می‌کنیم. ساختمان را، که کوششی نظام‌مند برای یافتن درختِ مـدلِ نقـض بـرای A ارائه می‌دهد، به‌وسیلهٔ قواعد زیر، که می‌تواند به هر نمودار از هر مجموعهٔ بَدیل از ساختمان اعمال شود، ادامه می‌دهیم:

Nl[۹]: اگر $\neg A$ در ستون سمت چپ نمودار ظاهر شود، در ستون سمت راست نمودار A را قرار دهید.

Nr: اگر $\neg A$ در ستون سمت راست نمودار t ظاهر شود، نمودار جدید t^1 را، هم‌راه بـا tSt^1، با قراردادن A در سمت چپ t^1 آغاز کنید.

$\wedge$l: اگـر $A \wedge B$ در سـمت چـپ نمـودار t ظـاهر شـود، A و B را در سـمت چـپ t قرار دهید.

$\wedge$r: اگر $A \wedge B$ در ستون سمت راست نمودار t ظاهر شود، دو راه جـای‌گـزین داریـم؛ نمودار t را یا با قراردادن A در ستون سمت راست، یا با قراردادن B در ستون سمت راست بسط دهید. اگر نمودار t مجموعهٔ مرتب $\mathcal{J}$ باشد، روشن است که در گام بعـدی باتوجـه‌بـه این‌که کدام بسط از نمودار t را پذیرفته باشیم دو مجموعـهٔ بـدیل داریـم. اگـر بـه‌صـورت غیرفنی بخواهیم بگوییم، اگر مجموعهٔ مرتب اصلی روی برگی کاغذ به‌صـورت سـاختاری ترسیم شده باشد، ما کل این ترسیم را دوبار کپـی مـی‌کنـیم؛ در مـورد اول A را در سـتون

سمت راست قرار می‌دهیم و در مورد بعدی B را. دو برگهٔ تازه مطابق است با دو مجموعهٔ جای‌گزین تازه. بیان فنی نسبتاً بی‌نظم است: در نمودار t ارائه‌شده در یک مجموعهٔ بدیل $\mathcal{I}$ اگر t در سمت راست داشته باشد، $A \wedge B$، $\mathcal{I}$ را با دو مجموعهٔ بدیل $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ جابه‌جا می‌کنیم، به‌طوری‌که $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} - \{t\} \cup \{t_1\}$ و $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I} - \{t\} \cup \{t_2\}$ و $t_1[t_2]$ شبیه t است به‌جزاین‌که، به‌علاوه شامل $A[B]$ در راست است. درخت مرتب‌شدهٔ S_1 از مجموعهٔ تازهٔ $\mathcal{I}_1$ دقیقا شبیه S است و t_1 در همه‌جا با t عوض می‌شود. و به همین ترتیب برای درخت مرتب‌شدهٔ S_2 از $\mathcal{I}_2$ (در بیان فنی: S_1 با S در $\mathcal{I} - \{t\}$ در توافق است و اگر t' مقدم (یک تالی) t باشد آن‌گاه داریم $t'S_1t_1[t_1S_1t']$.) می‌گوییم $\mathcal{I}$ به $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ تقسیم می‌شود. ملاحظات مشابهی به قواعد Vl و Pl زیر اعمال می‌شود.

Vl: اگر $A \vee B$ در سمت چپ t ظاهر شود، یا A را در سمت چپ t یا B را در سمت چپ t قرار بدهید (همانند مورد Λr، این مجموعهٔ $\mathcal{I}$ شامل t را به دو مجموعهٔ بدیل تقسیم می‌کند).

Vr: اگر $A \vee B$ در سمت راست t ظاهر شود، A و B را در سمت راست t قرار دهید.

Pl: اگر $A \supset B$ در سمت چپ t ظاهر شود یا A را در سمت راست t، یا B را در سمت چپ قرار دهید (بنابراین مجدداً مجموعهٔ $\mathcal{I}$ شامل t با دو مجموعهٔ بدیل جای‌گزین می‌شود).

Pr: اگر $A \supset B$ در سمت راست t ظاهر شود، نمودار جدید t^1 را با A در سمت چپ t^1 و B در سمت راست، به‌طوری‌که tSt^1، شروع کنید.

برای ساختمان‌هایی که شامل سورها هستند در گام داده‌شدهٔ ساختمان یک مجموعهٔ $\psi(t)$ از متغیرها به هر نمودار t اختصاص می‌دهیم. تعریف $\psi(t)$ را با فرض این‌که در گام اولیهٔ ساختمان، که با یک نمودار منفرد t_0 آغاز می‌شود، $\psi(t_0)$ شامل یک متغیر منفرد x است شروع می‌کنیم؛ در گام‌های بعدی $\psi(t)$ فقط باید به‌مثابهٔ الزامات قواعد Πr و Σl زیر و فرض این‌که tSt^1 مستلزم $\psi(t) \subseteq \psi(t^1)$ توسعه یابد. حال ما در وضعیتی هستیم که بگوییم قواعد سورها چنین است:

Πl: اگر $(x)A(x)$ در سمت چپ t ظاهر شود و y هر متغیری در $\psi(t)$ باشد، $A(y)$ را در سمت چپ t قرار دهید.

Πr: اگر $(x)A(x)$ در سمت راست t ظاهر شود، یک نمودار جدید t^1 با tSt^1 شروع کنید. اگر y متغیری باشد که طبق ترتیب حروف الفبا از همه پیش باشد که تاکنون در هیچ

نموداریی از هیچ مجموعهٔ بدیلی در این گام ظاهر نشـده باشـد، قـرار دهیـد $y \in \psi(t^1)$ و $A(y)$ را در سمت راست t^1 قرار دهید.

Σl: اگر $(\exists x)A(x)$ در سمت راست نمودار t قرار ظاهر شود و y متغیری باشد که طبق ترتیب حروف الفبا از همه پیش باشد که تاکنون در هیچ نموداری از هیچ مجموعـهٔ بـدیلی در این گام ظاهر نشده باشد، قرار دهید $y \in \psi(t)$ و $A(y)$ را در سمت چپ t قرار دهید.

Σr. اگر $(\exists x)A(x)$ در سمت راست نمودار t ظاهر شـود و y متغیـری در $\psi(t)$ باشـد، $A(y)$ را در سمت راست t قرار دهید.

علاوه‌بر قواعدی که بیان کردیم فرض‌های زیر در سرتاسر ساختمان برقرار است: اگر t و t^1 در هر گام داده‌شده نمودارهای برخی مجموعه‌های بدیل باشند، به‌طوری‌که tSt^1 و A در سمت چپ t ظاهر شود، آن‌گاه A را در سمت راست t^1 قـرار دهیـد. توجـه کنیـد کـه ازآن‌جاکه فرض باید بازگوکنندهٔ یک واحد زمانی دل‌خواه باشد، هنگـامی‌کـه A در سـمت چپ t و tRt^1 است نیز اعمال می‌شود.

رابطهٔ tSt^1 در ساختمان فقط به‌مثابهٔ الزامات قواعدی که در بالا آمـده‌انـد برقـرار شـده است. قواعد می‌توانند به هر نظمی اعمال شوند، تازمانی‌که این نظم طـوری فـرض گرفتـه شده باشد که هر قاعدهٔ قابلِ‌اعمال سرانجام اعمال شود.

نمودار t را بسته می‌خوانیم، اگر و تنها اگر برخی فرمولِ آن در هر دو سـمت راسـت و چپ آن رخ دهد. یک مجموعه یا درختِ نمودارها بسته است، اگر و تنها اگر برخی نمودار در آن مجموعه بسته باشد. یک سیستم از مجموعه‌های بدیل بسته است، اگر و تنها اگر هـر مجموعه از سیستم بسته باشد.

یک ساختمان را که به‌وسیلهٔ قراردادن A در سمت راست نمودار اصلی سـاختمان آغـاز شده باشد ساختمانی برای A می‌خوانند.

می‌توانیم محدودیت‌هایی که در پی می‌آید را در ساختمان اعمال کنیم: یک قاعده نبایـد به یک نمودار از مجموعهٔ بسته‌شده اعمال شود؛ هم‌چنین اگر آن قاعده زائد باشد هم نبایـد اعمال شود (برای مثال، Λl نباید اعمال شود، اگـر A و B قـبلاً در سـمت چـپ نمـودار t موردبحث ظاهر شده باشد).

اجازه دهید یک مجموعهٔ بدیل در هر گام از یک ساختمان را نهایی بخوانیم، اگر و تنها اگر در هر گام از ساختمان توسط یک مجموعهٔ دیگر یا زوجی از مجموعه‌هـا جـای‌گـزین نشده باشد. بنابراین، به‌ویژه، هر مجموعهٔ بسته‌ای نهایی است.

در هر ساختمانی، در نظر بگیرید α دنبالهٔ ثابت $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots$ از مجموعه‌های بـدیل باشـد، به‌طوری‌که $\mathcal{J}_1$ یک مجموعه در گام اول ساختمان است و $\mathcal{J}_{i+1}$ یک مجموعه یا یکی از دو مجموعه‌ای است که در گـام $(i+1)$ امـین بـا $\mathcal{J}_i$ جـای‌گـزین مـی‌شـود؛ α در $\mathcal{J}_n$ پایـان می‌پذیرد، اگر و تنها اگر $\mathcal{J}_n$ نهایی باشد (اگر ساختمان به‌پایان نرسد دست‌کم یـک چنـین دنبالهٔ نامتناهی چون α وجود دارد). هر نمودار t در $\mathcal{J}_1$ یـا در $\mathcal{J}_{i+1}$ را کـه تـالیِ بلادرنـگ (immediate descendant) از یک نمودار $\mathcal{J}_i$ نیست یک نمودار اولیه می‌خوانیم. K را مجموعهٔ تمام دنباله‌های τ از نمودارها $t_1, t_2, \ldots$ در نظر بگیرید، به‌طوری‌که t_1 یـک نمـودار اولیـه و t_{i+1} یک تالی بلادرنگ از t_i باشد و τ در t_n به انتها می‌رسد، اگر و تنها اگر t_n به مجموعهٔ نهایی $\mathcal{J}_m$ تعلق داشته باشد. در نظر بگیرید τ_0 عضوی از K باشد که جملهٔ اولـش t_1 در $\mathcal{J}_1$ باشد. به‌ازای τ و τ′ در K، در نظر بگیرید $\tau\rho\tau'$، اگـر و تنهـا اگـر بـه‌ازای برخـی $\mathcal{J}_i$ در α جملات t, t' از τ, τ' در $\mathcal{J}_i$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که tRt' (R مقدمهٔ درخت مرتب‌شدهٔ S است). سپس به‌صورت شهودی (τ_0, K, ρ) یک *q.m.s* را با دامنهٔ تابع

$$\bar{\psi} = \bigcup_{t_i \in \tau} \psi\,(t_i)$$

را صورت می‌دهد. اگر مدل تسویری ϕ تعریف شده باشد، به‌ازای هـر جملـه‌نشـانهٔ P، $\phi(P,\tau) = T$، اگر و تنها اگر P در سمت چـپ برخـی t در τ ظـاهر شـود و بـه‌ازای هـر محمول‌نشانهٔ P^n، $\phi(P^n,\tau)$ مجموعه‌ای n–تایی $(x_1, \ldots, x_n)$ از متغیرهاست، بـه‌طـوری‌کـه $P^n(x_1, \ldots, x_n)$ در سمت چپ از برخی t در τ ظاهر شود. سپس به‌ازای هر فرمول B، اگر B در سمت چپ برخی t در τ ظاهر شود، $\phi(B,\tau) = T$ (درارتباطبا تخصیص هـر متغیـر آزاد در B به خودش). بیش‌تر این‌که قانون دوتایی مبنی‌بر به‌ازای هـر B اگـر B در سـمت راست برخی t در τ ظاهر شود، آن‌گاه $\phi(B,\tau) = F$ برقرار اسـت، اگـر و تنهـا اگـر α در مجموعهٔ بستهٔ $\mathcal{J}_n$ پایان نپذیرد. بنابراین اگر ساختمان ساختمانی بـرای A باشـد، ایـن فقـط وضعیتی است که در آن α مدل نقضی برای A به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲: ساختمان برای A بسته است، اگر و تنها اگر A معتبر باشد.

برهان را، که از سطرهایی که در بالا به‌صورت شهودی ترسیم شـد تبعیـت مـی‌کنـد و به‌علاوه نشان می‌دهد مجموعه‌های بدیلِ ساختمان A احتمال‌هایی را که بـرای یـافتن مـدل نقض برای A وجود دارد از بین می‌برد، حذف کرده‌ایم، زیرا آن برهان یک تبدیل‌یافتهٔ عادی از برهان‌های قضایای مشابه (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) است.[۱۰]

۳.۲ قضیهٔ تمامیت

۱.۳.۲ خاصیت سازگاری

قضیهٔ ۳: اگر A در حساب محمولی هیتینگ اثبات‌پذیر باشد، آن‌گاه A معتبر است.

این قضیه تقریباً بدیهی است. فقط باید در صورت‌بندی استاندارد حساب محمولی هیتینگ تأیید کنیم که اصل موضوها معتبرند و قواعد اعتبارنگدارند. چنان تأییدکردنی به‌عهدهٔ خواننده گذارده مشود. در این بخش دلالشناسی نمودارهایِ بث،

اگر نتیجه شود که A اثبات‌پذیر است، ساختمان برای A بسته است.

۲.۳.۲ خاصیت تمامیت

نشان می‌دهیم هر فرمول معتبرِ A اثبات‌پذیر است؛ باتوجه‌به این‌که اگر ساختمان A بسته باشد آن‌گاه A اثبات‌پذیر است. مشابه (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) این کار را با استفاده از ایدهٔ فرمول مشخصه (Characteristic formula) انجام می‌دهیم.

مشابه (Kripke 1963a)، رتبهٔ نمودار را در یک درخت متناهی از نمودارها (یا درحقیقت به‌وسیلهٔ یک گره در هر نمودار متناهی) چنین تعریف می‌کنیم: نقطهٔ پایان درخت رتبهٔ 0 دارد. اگر t نقطهٔ پایان نباشد، در نظر بگیرید $t_1, \dots, t_n$ تالی‌های آن باشد، آن‌گاه $Rank(t) = Max\,\{Rank(t_i)\} + 1$. ساده است که نشان دهیم به‌ازای هر درخت متناهی از نمودارها یک رتبهٔ منحصربه‌فرد برای هر نمودار از درخت تعریف می‌شود.

در هر نمودار داده‌شدهٔ t در یک درخت از نمودارها، دنبالهٔ زیر را تعریف می‌کنیم: $\{t_i\}: t_0 = t, t_{j+1} = the\ predecessor\ of\ t_j$ اگر چنان مقدمی وجود داشته باشد؛ درغیراین‌صورت تعریف‌ناپذیر باشد. دنباله به‌صورت واضحی متناهی است و جملهٔ آخرش مبدأ درخت است. ما آن را چنین می‌خوانیم «مسیر برگشت از t به مبدأ». جملات دنباله به‌جز t «جلوتر از t» روی درخت می‌آیند. به‌ازای هر t روی درخت در نظر بگیرید: $\chi(t)$ مجموعهٔ تمام متغیرها که در t آزادند؛ اما چنین نیست که در هر نمودار پیش از آن بیاید.

در هر گام از ساختمان نمودارهای یک مجموعهٔ بدیل به یک درخت متناهی صورت می‌دهد. ما فرمولِ مشخصه از یک نمودار t در مجموعه را در یک گام داده‌شده با استقرا روی رتبهٔ آن درِ مجموعه تعریف می‌کنیم. در نمودار داده‌شدهٔ t در نظر بگیرید $A_1, \dots, A_m[B_1, \dots, B_n]$ فرمولی باشد که در سمت چپ (راست) t ظاهر می‌شود. علاوه‌براین در نظر بگیرید $x_1, \dots, x_q$ اعضای $\chi(t)$ باشند (محتمل است که $q = 0$). اگر

رتبه $(t) = 0$ باشد، آن‌گاه فرمول مشخصهٔ t چنین تعریف می‌شود: $(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge$ $\dots A_m . \supset . B_1 \vee \dots B_n)$؛ یا اگر هیچ فرمولی در چپ (راست) t نباشد، چنین تعریف می‌شود $(x_1) \dots (x_q)(B_1 \vee \dots B_n)[(x_1) \dots (x_q) \neg (A_1 \wedge \dots A_m)]$. اگر رتبه $(t) > 0$ باشد، در نظر بگیرید $t_1, \dots, t_p$ تالی‌های t باشد و در نظر بگیرید $C_1, \dots, C_p$ فرمول مشخصهٔ متناظر باشد. آن‌گاه فرمول مشخصهٔ t $(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge \dots A_m . \supset . B_1 \vee \dots B_n \vee C_1 \vee \dots C_p)$ است؛ یا اگر هیچ فرمولی در سمت چپ (راست) t نبود، $(x_1) \dots (x_q)(B_1 \vee \dots B_n \vee C_1 \vee$ $\dots C_p)[(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge \dots A_m . \supset . C_1 \vee \dots C_p)]$. فرمول مشخصه از یک مجموعهٔ بدیل (درخت) نمودارها به‌صورت فرمول مشخصهٔ نمودار اصلی از مجموعه تعریف شده است. فرمول مشخصهٔ کل سیستمِ مجموعه‌های بدیل در هر گام داده‌شده از ساختمان هم‌چون عطفِ فرمول‌هایِ مشخصهٔ مجموعه‌هایِ بدیل سیستم تعریف شده است.

در معنای طبیعی، ایدهٔ حاضر از فرمول مشخصه هم‌زادی برای (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) است. درک مطلب خواننده از ایدهٔ فرمول مشخصه می‌تواند تسهیل شود، اگر تلقی‌های مشابه از فرمول مشخصه در (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) را نیز کنکاش کند.

لم: اگر A_0 فرمول مشخصه از گام اولیهٔ ساختمان باشد و B_0 فرمول مشخصه‌ای از هر گامی از ساختمان باشد، آن‌گاه

$$\vdash B_0 \supset A_0$$

برهان: کافی است نشان دهیم که فرمول مشخصهٔ هر گام از ساختمان دلالت بر فرمول مشخصهٔ گام قبل می‌کند. اما فرمول مشخصه از m امین گام به‌طور عمومی به‌صورت $D_1 \wedge \dots D_j \wedge \dots D_n$ است، به‌طوری‌که $D_i (1 \leq i \leq n)$ فرمول‌های مشخصهٔ مجموعه‌های بدیل آن گام‌اند. قاعده‌ای که اعمال شده است و m امین گام را به $m + 1$ امین گام تغییر می‌دهد فقط یک مجموعهٔ بدیل هم‌راه با فرمول مشخصهٔ D_j را تغییر می‌دهد. اگر قاعده Pl، Λr، یا VI باشد، این مجموعه را به دو مجموعهٔ بدیل مجزا با فرمول‌های مشخصهٔ D_j' و D_j'' تغییر خواهد داد. حال مایلیم اثبات کنیم $\vdash D_1 \wedge \dots D_j \wedge D"_j \wedge \dots D_n . \supset . D_1 \wedge \dots D_j \wedge$ $\dots D_n$. برای انجام این کار کافی است اثبات کنیم $D_j' \wedge D_j'' . \supset . D_j$. به همین ترتیب، اگر قانونی که اعمال می‌شود، به‌جز Pl، Λr یا VI باشد، آن‌گاه D_j به D_j' تبدیل می‌شود. برای اثبات این‌که $\vdash D_1 \wedge \dots D_j' \wedge \dots D_n . \supset . D_1 \wedge \dots D_j \wedge \dots D_n$ کافی است که اثبات کنیم $\vdash D_j' \supset D_j$. بنابراین هنگامی که یک قاعده تبدیل‌کنندهٔ گام m ام ساختمان به گام $m + 1$ ام

اعمال شد، فقط نیاز داریم که فرمول مشخصهٔ مجموعه‌ای را در نظر بگیریم که قاعده درواقع به آن اعمال شد.

حال فرض کنید یک قاعده (به‌جز Λr، Pl یا VI) یک مجموعه چون $\mathcal{I}$ با فرمول مشخصهٔ D_j را به یک مجموعه با فرمول مشخصهٔ D_j' تبدیل می‌کند. می‌خواهیم اثبات کنیم $\vdash D_j' \supset D_j$. در نظر بگیرید t نموداری باشد که قاعده درواقع به آن اعمال شده است و در نظر بگیرید C فرمول مشخصهٔ آن باشد. علاوه‌براین، در نظر بگیرید که C' فرمول مشخصهٔ نمودار t' باشد که نمودار t به‌وسیلهٔ اِعمال قاعده به آن تبدیل شده است (قواعد Nr، Pr، Πr، t را دست‌نخورده باقی می‌گذارند و یک نمودار جدید t^1 اضافه می‌کنند. در آن موردی که t' با t یک‌سان خواهد بود، اما فرمول مشخصهٔ جدید C' مربوط به نمودار t با فرمول مشخصهٔ قدیمی C یک‌سان نیست). فرض کنید که ما می‌توانیم نشان دهیم $\vdash C' \supset C$. آن‌گاه اگر t نمودار اصلی مجموعهٔ $\mathcal{I}$ باشد، ما نشان داده‌ایم که $\vdash D_j' \supset D_j$. درغیراین‌صورت، در نظر بگیرید t_1 در گام m ام t مقدم باشد و در نظر بگیرید t_1' در گام $m+1$ ام از t' مقدم باشد و در نظر بگیرید $C_1[C_1']$ فرمول مشخصهٔ $t_1[t_1']$ باشد. آن‌گاه C_1 تسویر کلی (u.q.) یک فرمول از فرم $X.\supset.Y \vee C$ است و C_1' یک u.q. از فرم $X.\supset.Y \vee C'$ باشد. ازآن‌جاکه $\vdash C' \supset C$ واضح است که $\vdash (X.\supset.Y \vee C') \supset (X.\supset.T \vee C)$. با اِعمال‌کردن تعمیم کلی به این آخرین حکم و توزیع‌کردن سورهای کلی درمیان نماد استلزام به‌دست می‌آوریم $\vdash C_1' \supset C_1$. اگر t_1 نمودار اصلی $\mathcal{I}$ باشد، آن‌گاه $C_1' \supset C_1$ هست $D_j' \supset D_j$. درغیراین‌صورت در نظر بگیرید $t_2[t_2']$ مقدم $t_1[t_1']$ باشد و استدلال مشابهی را مثل قبل بدان اعمال کنید. ظاهراً به‌دست خواهیم آورد $D_j' \supset D_j$. بنابراین درمورد هر قاعده‌ای به‌جز Λr، Pl یا VI فقط باید نمودار t را که قاعده واقعاً بدان اِعمال شده است در نظر بگیریم و فرمول $C' \supset C$ را که در بالا برقرار شد اثبات کنیم. توجه کنید که به‌طور کلی C فرمول مشخصهٔ t یک u.q. از فرمول معین B است و C' یک u.q. از فرمول معین B' است. اگر اثبات کنیم $\vdash B' \supset B$، آن‌گاه به‌وسیلهٔ تعمیم کلی و توزیع سورها در اطراف نماد استلزام می‌توانیم به‌دست آوریم: $C' \supset C$.

این ملاحظات را در ذهن نگه دارید؛ ما برهان را باتوجه‌به قاعده‌ای که برای به‌دست‌آوردن $m+1$ امین گام از m امین گام به‌کار گرفته شده است به موارد زیر تجزیه می‌کنیم. می‌توانیم بگوییم یک مورد «تصدیق شده است» اگر برای آن مورد نشان داده باشیم که $\vdash D_j' \supset D_j$ که‌این در واقع به $\vdash B' \supset B$ فروکاسته می‌شود. به خواننده توصیه می‌شود که برخوردهای مشابه در (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) را کنکاش کند.

برای درنظرگرفتن یک قاعده، به‌طور کلی نمودار t را فرض خواهیم کرد که فرمول‌های شاملش، هم در سمت راست و هم در سمت چپ، اعمال شده و بنابراین فرمول مشخصه‌اش یک استلزام است. مواردی که سمت راست یا چپ تهی‌اند به خود خواننده واگذار خواهد شد.

مورد Nl: فرمول مشخصهٔ t یک u.q. از $X \wedge \neg A.\supset.Y$ است. بعد از این‌که A در سمت راست قرار گرفت فرمول مشخصه‌اش یک u.q. از $X \wedge \neg A.\supset.Y \vee A$ خواهد بود. این مورد با $\vdash X \wedge \neg A.\supset.Y \vee A:\supset: X \wedge \neg A.\supset.Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Nr: فرمول مشخصهٔ t یک u.q. از $X.\supset.\neg A \vee Y$ است. هنگامی‌که یک نمودار جدید t^1 همراه با A در سمت چپ آغاز می‌کنیم و tSt^1 فرمول مشخصه از t^1 هست $\neg A$ (زیرا $\chi(t^1)$ تهی است، چون یکی از متغیرهای آزاد A هم‌اکنون در t ظهور پیدا کرده است) و فرمول مشخصهٔ t یک u.q. از $X.\supset.\neg A \vee Y \vee \neg A$ می‌شود. این مورد با $\vdash X.\supset.\neg A \vee Y \vee \neg A:\supset: X.\supset.\neg A.\vee.Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Λl: با $\vdash X \wedge A \wedge B \wedge A \wedge B.\supset.Y:\supset: X \wedge A \wedge B.\supset.Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Λr: در نظر بگیرید فرمول مشخصهٔ t را بخوانیم C که یک u.q. از $X.\supset.Y \vee (A \wedge B)$ باشد. قاعدهٔ Λrt را به دو نموداری بدیل t' و t'' تقسیم می‌کند که فرمول مشخصه‌شان C' و C''، به‌ترتیب u.q.های $X.\supset.Y \vee (A \wedge B) \vee A$ و $X.\supset.Y \vee (A \wedge B) \vee B$ است. با استفاده از $\vdash (X.\supset.Y \vee (A \wedge B) \vee A) \wedge (X.\supset.Y \vee (A \wedge B) \vee B):\supset: X.\supset.Y \vee (A \wedge B)$ و تعمیم و توزیع سورها به‌دست می‌آوریم $\vdash C' \wedge C''.\supset.C$. اگر t نمودار اصلی مجموعه باشد، این نتیجه مطلوب است: $\vdash D_j' \wedge D_j''.\supset.D_j$. درغیراین‌صورت در نظر بگیرید t_1 مقدم t باشد. فرمول مشخصهٔ C_1 برای t_1 یک u.q. از $X_1.\supset.Y_1 \vee C$ است و با Λr به دو فرمول مشخصهٔ بدیل C_1' و C_2'' تبدیل می‌شود که به‌ترتیب u.q. های $X_1.\supset.Y_1 \vee C'$ و $X_1.\supset.Y_1 \vee C''$ هستند. با استفاده از $\vdash C' \wedge C''.\supset.C$ به سادگی به‌دست می‌آوریم: $\vdash C_1' \wedge C_1''.\supset.C_1$. با ادامه‌دادن این روند در مسیر برگشت از t به سوی مبدأ، در تعدادی گام‌های متناهی به‌دست می‌آوریم: $\vdash D_j' \wedge D_j''.\supset.D_j$.

مورد Pl: شبیه به Λr با استفاده از $\vdash (X \wedge (A \supset B).\supset.Y \vee A) \wedge (X \wedge (A \supset B) \wedge B.\supset.Y):\supset: X \wedge (A \supset B).\supset.Y$.

مورد Pr: در نظر بگیرید فرمول مشخصه t یک u.q. از $X.\supset.Y \vee (A \supset B)$ باشد. Pr ما را به‌سوی آغاز یک نمودار جدید t^1 همراه با A در سمت چپ و B در سمت راست، که

بنابراین فرمول مشخصه‌اش $A \supset B$ است، راه‌نمایی می‌کند. ($\chi(t^1)$ تهی است). آن‌گاه فرمول مشخصهٔ t به یک u.q. $X.\supset.Y \vee (A \supset B) \vee (A \supset B)$ تبدیل شد و $\vdash X.\supset.Y \vee (A \supset B) \vee (A \supset B) :\supset: X.\supset.Y \vee (A \supset B)$ تصدیق کنندهٔ مورد است.

مورد Vl: شبیه به Λr با استفاده از $\vdash (X \wedge (A \vee B) \wedge A.\supset.Y) \wedge (X \wedge (A \vee B) \wedge$ $(B.\supset.Y) :\supset: (X \wedge (A \vee B).\supset.Y)$.

مورد Vr: با $X.\supset.Y \vee (A \vee B) \vee A \vee B :\supset: X.\supset.Y \vee (A \vee B)$ تصدیق می‌شود.

مورد Σl: اگر t فرمول مشخصهٔ C یک u.q. ی $X \wedge (\exists x)A(x).\supset.Y$ را داشته باشد، بعد از اعمال Σl، t به t^1 که فرمول مشخصهٔ آن C' یک u.q. ی $X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a).\supset.Y$ را دارد. ازآن‌جاکه a یک متغیر تازه است که قبلاً معرفی نشده بود $a \in \chi(t^1)$، بدین ترتیب می‌توانیم C' را یک u.q. ی $(a)(X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a).\supset.Y)$ بگیریم. بنابراین $\vdash (a)\big(X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a)\big)$.

مورد Σr: با $\vdash X.\supset.Y \vee (\exists x)A(x) \wedge A(a) :\supset: X.\supset.Y \vee (\exists x)A(x)$ توجیه می‌شود.

مورد Πl: با $\vdash X \wedge (x)A(x) \wedge A(a).\supset.Y :\supset: X \wedge (x)A(x).\supset.Y$ توجیه می‌شود.

مورد Πr: فرمول مشخصهٔ t یک u.q. $X.\supset.Y \vee (x)A(x)$ است. Πr ما را راه‌نمایی می‌کند تا یک نمودار جدید t^1 همراه با tst^1 و $A(a)$ در سمت راست آغاز کنیم، به‌طوری‌که a قبلاً استفاده نشده باشد. آن‌گاه $\chi(t^1) = \{a\}$، زیرا a تنها متغیر آزاد t^1 است که در t رخ نداده است. بنابراین فرمول مشخصهٔ t^1 است: $(a)A(a)$ و فرمول مشخصهٔ t به یک u.q. از $X.\supset.Y \vee (x)A(x) \vee (a)A(a)$ تبدیل شده است. بنابراین $\vdash X.\supset.Y \vee$ $(x)A(x) \vee (a)A(a) :\supset: X.\supset.Y \vee (x)A(x) \vee (x)A(x)$ تصدیق می‌شود.

نهایتاً، ما باید تصدیق کنیم قانونی را که بیان می‌کند: اگر یک فرمول چون A در سمت چپ نمودار t ظاهر شود و tst^1، آن‌گاه باید A را در سمت چپ t^1 قرار دهیم. این مطلب با $X \wedge A.\supset.Y \vee \big((X' \wedge A) \supset Y'\big) :\supset: X \wedge A.\supset.Y \vee (X' \supset Y')$ توجیه می‌شود. حال لم اثبات شده است.

قضیه ۴: اگر A معتبر باشد، آن‌گاه A در حساب محمولات هیتینگ اثبات شده است.

برهان: می‌توانیم فرض بگیریم A هیچ متغیر آزادی ندارد. ازآن‌جاکه A معتبر است، ساختمان برای A بسته است. آن‌گاه یک گام وجود دارد که در آن هر مجموعهٔ بدیل بسته است. در نظر بگیرید فرمول مشخصهٔ آن گام باشد: $D_1 \wedge \ldots D_n$، به‌طوری‌که D_j ها فرمول مشخصهٔ مجموعه‌های بدیل آن گام باشد. از لم داریم: $D_1 \wedge \ldots D_n.\supset.A$ (زیرا A فرمول

مشخصهٔ گام اولیه است). بنابراین کافی است به‌ازای هر j نشان دهیم D_j. مجموعـهٔ بـدیلی که فرمول مشخصه‌اش D_j است و بسته شده است شامل یک نمودار t بسته است. آن‌گـاه t شامل یک فرمول B در هر دو سمت اسـت؛ بنـابراین فرمـول مشخصـهٔ آن C یـک u.q. از $X \wedge B. \supset. Y \vee B$ است. واضح است که $\vdash C$. اگر t نمودار اصلی مجموعه باشـد، ایـن D_j است. درغیراین‌صورت، در نظر بگیرید t_1 مقدم t باشد. آن‌گـاه فرمـول مشخصـهٔ C_1 از t_1 یک u.q. از $X'. \supset. Y' \vee C$ است. واضح است که $\vdash C_1$. با ادامه‌دادنِ این روش، ما در مسیر برگشتن از t به‌سوی مبدأ حرکت می‌کنیم، تازمانی‌که به‌دست بیاوریم: $\vdash D_j$. [11]Q.E.D.

توجه: قضیه یک برهان شبه‌متناهی ارائه می‌دهد که اگر ساختمان A بسـته باشـد $\vdash$ A. می‌توانستیم این را به‌صورت دیگری با نشان‌دادن این‌که روند نمودار معادل با صورت‌بندی استاندارد گنتزن (Gerhard Karl Erich Gentzen) سیستم هیتنگ است نیز اثبـات کنـیم. البتـه قضیه و برهان به حساب جملات نیز اعمال می‌شود، حتی در چنین صـورتی برهـان بـرای حساب محمولی نیز برقرار است.

۴.۲ منابع (مقالهٔ کریپکی)[12]

Beth, Evert Willem (1962), “Observations on an Independence Proof for Peirce's Law (abstract)”, The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 25 (1960; published 1962).

Beth, Evert Willem (1957), “Semantic Construction of Intuitionistic Logic”, *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Dee! vol. 19.

Cohen, Paul J. (1963), “The Independence of the Continuum Hypothesis”, *Pwceedings of the National Academy of Sciences*, U.S.A. vol. 50, issue 6.

Dummett, Michael Anthony and John Lemmon (1958), “Modal Logics between S4 and SS”, *Zeit- schrift flir Mathcmatische Logik und Grundlagcn dcr Mathematik*, vol. 4.

Dyson Verena H and Georg Kreisel (1961) , “Analysis of Beth's Semantic Construction of In tuitionistic Logic”, *Technical Report*, no. 3, Stanford University Applied Mathe- matics and Statistics Laboratories, Stanford, California.

Heyting, Arand (1956), *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Kleene, Stephen Cole (1952), *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, New York: North-Holland Publishing Co., Amsterdam and P. Noordhotf Ltd., Groningen.

Kreisel, Georg (1962), “On Weak Completeness of Intuitionistic Predicate Logic”, The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 27.

Kreisel, Georg (1958), “A Remark on Free Choice Sequences and the Topologica l Completeness Proofs”, The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 23.

Kreisel, Georg (1961), *Set Theoretic Problems Suggested by the Notion of Potential Totalition: Infinitistic Methods*, Warsaw.

Kripke, Saul A. (1959a), “A Completeness Theorem in Modal Logic”, The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 24.

Kripke, Saul A. (1959b), “Semantical Analysis of Modal Logic (abstract)”, The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 24.

Kripke, Saul A. (1963a), “Semantical Analysis of Modal Logic I, Normal Modal Proposi- tional Calculi”, *Zeitschrift fUr Mathematische Logik und Grundlagen der Mathe- mathik*, vol. 9.

Kripke, Saul A. (1963b), “Semantical Considerations on Modal and Intuitionistic Logic”, *Acta Philosophica Fennica*, vol. 16.

Kripke, Saul A. (1962), “The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory”, *Zeitschrift fi.ir Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 8.

Kuroda, Sigekatu (1951), “lntuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik”, *Nagoya Mathematical* Journal, vol. 2, Known only from references.

Markov, Andrey Andreyevich (1954), *On the Continuity of Constructive Functions,* Uspehi Matern, Nauk, Known only from References.

۵.۲ یادداشت (اضافه‌شده در تاریخ ۹ آگوست ۱۹۶۴)

اکنون مقالهٔ فرفرمان را دیده‌ایم و درحقیقت دیدگاه او دربارهٔ فورسینگ تقریباً به دیدگاه ما نزدیک است، اگرچه او آن را برمبنای نظریهٔ مدلی برای یا دربارهٔ منطق شهودی بنا نکرده است.

۶.۲ یادداشت (اضافه‌شده در تاریخ ۲۸ اکتبر ۱۹۶۴)

دربارهٔ ملاحظهٔ انتهای بخش ۱.۱.۲ باید اشاره شود که مثال بخش ۱ از ملاحظه اصل مارکو را رد می‌کند. در آن‌جا ملاحظه کردیم که در FC، $(a)\ (\alpha \upharpoonright \beta)\neg(x)(a(x) = 0)$؛ اما هم‌چنین

$(b) \quad \neg(\alpha \upharpoonright \beta)(\exists x)(\alpha x) = 1)$. از (b) توجه کنید که تازمانی‌که B یـک فضـای دودویـی است، $(\alpha \upharpoonright \beta)(x)(\alpha(x) \neq 0 \supset \alpha(x) = 1$، داریـم $(c) \quad \neg(\alpha \upharpoonright \beta)(\exists x)(\alpha(x) \neq 0)$. امـا (a) و (c) با هم با اصل مارکوف در تضادند. مثال بخش ۲ از ملاحظه بـرای ایـن ارائـه شد تا نشان دهیم که یک مثال نقض به‌تنهایی می‌تواند هر دو اصل مـارکوف و حـدس کوردا را رد.

باید اشاره کنیم که اصل مارکوف به‌ازای α از یک فضای کـاملاً دودویـی مسـتلزم ایـن خواهد بود که $\neg(x)(\alpha(x) = 0 \supset (\exists x)(\alpha(x) = 1)$. از این به‌راحتی نتیجه مـی‌شـود که برای عدد حقیقی a، $a \neq 0$ دلات مـی‌کنـد بـر $a \# 0$. (مشـابه بخـش ۱ از ملاحظـه). بنابراین اگر دلیلِ ردِ برآوئر از مورد دومی (با استفاده‌کردن از ips وابسـته بـه حـل مسـائل) پذیرفته شود، برآوئر قبلاً اصل مارکوف را رد کرده است.

می‌خواهم از مایکل دامت و جان کرازلی بـرای کمکشـان در ویراسـتاری ایـن مقالـه و به‌ویژه از دامت برای اصلاح مهمی در بخش ۲.۱.۲ تشکر کنم.

۳. نتیجه‌گیری

سیستمِ دلالت‌شناسی طراحی‌شده ازسوی کریپکی برای منطق شهودی، طی سال‌هایِ پس از عرضه، وسـیلهٔ همـه‌کـاره‌ای بـرای منطـق شـهودی اسـت، بـرخلاف سـایر سیسـتم‌هـای دلالت‌شناسی‌اش. این ابزار منعطف از مفاهیم فنیِ حاد ریاضتی ـ شهودگرایی فاصله می‌گیرد و خود را برای اهداف منطقیِ منطق‌دانان و نیز آموزشی مناسب‌تر می‌کند. به‌علاوه کریپکـی توانست با وام از ابزارِ **رابطهٔ فورسینگِ** پل کوئن ریاضی‌دان آمریکایی و با ابتنا بر جهان‌های ممکنِ موجهاتی، که از تحقیقات خودش سرچشمه گرفته بود، گذری تازه برای حرکت بین منطقِ کلاسیک و منطق شهودی باز کند که منشأ اثر مطالعات کلان منطقی پـس از او شـد؛ علاوه‌براین، واجد اهمیت‌هایی فلسفی نیز است؛ مـثلاً ایـن‌کـه شـهودگرایی برآوئـر دارای لوازمی مفهومی است، *creating subject*، که احتمالاً به‌کمک آن‌ها بتوانـد ایـدهٔ جهـان‌هـای ممکن را در خود هضم و خود را تصریح کند.

پی‌نوشت‌ها

۱. هم‌چنین هریک به هر جزوی رسید/ فهم آن می‌کرد هرجا می‌شنید (مولانا، اختلاف در چگونگی و شکل پیل، دفتر سوم) (مترجم)

۲. برای خواننده ای که تمایل دارد محرک عمیق‌تر مقاله حاضر را به‌طور کامل درک کند، بااین‌حال اصرار دارد که در (Kripke 1963a)، (Kripke 1963b)، و (Kripke 1959) که تحلیل‌های زیربنایی برای منطق موجهات به‌دست می‌دهد کنکاش کند.

۳. در (Kripke1963a) پذیرفتیم $\emptyset(P, H)$ روی $H\varepsilon K$ و زیرفرمول اتمی از یک فرمول ثابت A مرتب شود. ما این را یک مدل از A خواندیم. می‌توانستیم به‌طور مشابه این جهت را به‌نحو مطلوبی در این‌جا نیز بپذیریم؛ *mutatis mutandis* به‌طور عکس (Kripke1963a) می‌تواند تعبیرات حاضر را بپذیرد. نظرگاه (Kripke1963a) در تحلیل **فورسینگ** کوئن به‌کار گرفته شده است، به‌طوری‌که در نظر گرفته‌ایم مدل‌ها فقط به فرمول‌هایی که از فرمول اتمی ثابت $P(x)$ ساخته شده باشند ارزش نسبت می‌دهد.

هم‌چنین باید اشاره کنیم گرچه در این بخش ما فرمول اتمی را جوری در نظر گرفته‌ایم که حروف گزاره‌ای و فرمول $P^n(x_1, \ldots, x_n)$ باشد، اگر فرمول از یک کلاس فرمول اتمی ثابت دل‌خواه ساخته شده باشد، تعریف‌ها باید به‌طور مشابه انجام شوند. در مسائل در تفسیر اثبات‌پذیری در بخش ۳.۱.۲ به‌کار گرفته شده است.

۴. ما مطلعیم که گودل (در نوشته ای منتشرنشده) پیشنهاد داده است که چنین دنباله‌هایی «مطلقاً بی‌قاعده» خوانده شوند؛ احتمالا با این استدلال که آن‌ها کاملاً آزاد نیستند و توسط الزامات «مرتبهٔ بالاتر» مبنی‌بر بدون هیچ‌گونه حدی‌بودن الاّ آن‌چه در تعریف سؤال آمده ست در بر گرفته شده‌اند و همیشه در تصمیم‌های بعدی توسط انتخاب آزاد در نظر گرفته می‌شوند. ازآن‌جاکه پیشنهاد گودل تاکنون مزین به زیور طبع نشده است، ما تردید داریم تا این تغییرات را مال خود کنیم.

۵. کوتاه‌نوشتی برای infinitely proceeding sequence. کریپکی استفاده از این کوتاه‌نوشت را از کتاب *Intuitionism: An Introduction* (1956) نوشتهٔ Arrand Heyting اخذ کرده است. برای اطلاعات تکمیلی، بنگرید به بخش ،۳ صفحهٔ ۳۲ از آن کتاب. (مترجم)

۶. initial segment: در نظر بگیرید $(A, \leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشد. آن‌گاه مجموعهٔ $\{a \in A : a < k\}$ به‌ازای برخی $k \in A$ را بخش اولیه از A می‌خوانیم (Rubin 1967: 161; Dauben 1990: 196-197; Moore 1982:. 90-91) (مترجم).

۷. این بخش در ترجمه نیامده است (مترجم).

۸. tableau /tableaux (plural) دکتر نبوی معادل این واژه را «نمودار» پیشنهاد داده‌اند (مترجم).

9. l: left/ r: right

۱۰. A را طوری تعریف می‌کنیم که درخت معتبر باشد، اگر و تنها اگر $\emptyset(A, G) = T$ برای هر مدل $\emptyset$ روی یک درخت $(G, K, R)q.m.s$. آن‌گاه آن‌چه به‌راحتی اثبات می‌شود این است که ساختمان بسته است، اگر و تنها اگر A یک درخت معتبر باشد. اما باتوجه‌به بخش ۲.۱.۲ بالا اعتبار منطبق

با اعتبار درخت است. به‌صورت جای‌گزین می‌توانیم بدون استفاده از بخش ۲.۱.۲ به‌صورت زیر استدلال کنیم: واضح است که اعتبار مستلزم اعتبار درخت است و اثبات‌پذیری مستلزم اعتبار است. نتایج تمامیت زیر نشان می‌دهد اعتبار درخت مستلزم اثبات‌پذیری است؛ بنابراین ایده‌های درخت منطبق‌اند.

می‌توانستیم مبتنی‌بر رابطهٔ R یک روند تابلو تعریف کنیم که در مقایسه با مدل درخت مناسبت بیش‌تری با مدل‌ها داشته باشد. خواننده‌ای که با (Kripke 1963a) آشناست می‌داند که چطور انجام می‌گیرد.

توجه کنید که، به‌عنوان موردی قابل‌مقایسه که در (Kripke 1963a) و (Kripke 1959) مشاهده شده است، مدل‌های نقضی که برای فرمول‌های نامعتبر از قضیهٔ ۲ از تابلوها به‌دست آمده است همواره روی یک درخت شمارش‌پذیر q.s.m. (G, K, R) هستند که با یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر U از افراد هم‌راه شده است. این نتایج لوونهیم ـ اسکولم (Lowenheim-Skolem) در قسمت II برای نشان‌دادن این‌که نتایج تمامیت حاضر شامل نتایج بث (Beth 1957) نیز است استفاده خواهد شد.

۱۱. Quod Erat Demonstrandum: عبارتی لاتین به‌معنی what was to be shown دربین ریاضی‌دانان به سنگ قبر معروف است و در پایان برهان قرار می‌دهند (مترجم).

۱۲. در مقالهٔ اصلی ارجاع‌دهی به‌صورت عددی است (مترجم).

کتاب‌نامه

اردشیر، محمد (۱۳۸۴)، *منطق ریاضی*، تهران: هرمس.

اردشیر، محمد (۱۳۸۷)، *فلسفهٔ برآوئر*، مارک فان آتن، تهران: هرمس.

Beth, Evert Willem (1960), "Observations on an Independence Proof for Peirce's Law (abstract) ", The Journal of *Symbolic Logic*, vol. 25 (published, 1962).

Beth, Evert Willem (1957), "Semantic Construction of Intuitionistic Logic", *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afd, Letterkunde, Nieuwe Reeks, Dee! vol. 19.

Cohen, Paul J. (1963), "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Pwceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 50, issue 6.

Dalen. Dirk Van (1997), *Structure and Logic*, Springer Universitext, ISBN 3-540-20879-8 318-324.

Dalen. Dirk Van. (2002), *Series: Handbook of Philosophical Logic*, vol V, Gabbay, Dov M., Guenthner, Franz (eds.), Spriger.

Dalen. Dirk Van (2001), “Intuitionistic Logic”, in: *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, New York: Blackwell.

Dummett, Michael Anthony Eardley (1970), *Elements of Intuitionism*, Oxford: Oxford University Press.

Dummett, Michael Anthony and John Lemmon (1958), “Modal Logics between S4 and SS”, *Zeit- schrift flir Mathcmatische Logik und Grundlagcn dcr Mathematik*, vol. 4.

Dyson Verena H and Georg Kreisel (1961) , “Analysis of Beth's Semantic Construction of Intuitionistic Logic”, *Technical Report*, no. 3, Stanford University Applied Mathe- matics and Statistics Laboratories, Stanford, California.

Gabbay, M. Dov (1981), *Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*, ISBN: 978-90-481-8362-3

Heyting, Arand (1956), *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Kleene, Stephen Cole (1952), *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, New York: North-Holland Publishing Co., Amsterdam and P. Noordhotf Ltd., Groningen.

Kripke, soul. (1965), “Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I”, in: *Formal Systems and Recursive Functions*, M. Dummett and J. N. Crossley (eds.), Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Troelstra, Anne Sjerp and P. van Ulsen (1999), “The Discovery of E.W. Beth’s Semantics for Intuitionistic Logic”, in: J. Gerbrandy, M. Marx, M. de Rijke, Y. Venema (eds.), *JFAK Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday*, Amsterdam: Amsterdam University Press