منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۸، ۱–۱۳

بررسی روش‌های مختلف معرفی فورسینگ

امید اعتصامی*

محمد گلشنی**، **شهرام محسنی‌پور*****

چکیده

روش فورسینگ کوهن یکی ازمهمترین ابزارهای نظریه مجموعه‌ها برای ساختن مدل‌های از ZFC می‌باشد. در این مقاله روش‌های مختلف معرفی فورسینگ را بررسی کرده و نشان می‌دهیم همه آنها با هم معادل هستند. ابتدا روش فورسینگ را به کمک مجموعه‌-های جزئاً مرتب بیان می کنیم و بعضی از خواص اساسی آن را ذکر می‌کنیم. سپس روش مدل‌های جبر بولی–مقدار را می‌آوریم و نشان می دهیم که این رویکرد به فورسینگ با روش اول معادل است. این کار با نشان دادن اینکه هر مفهوم فورسینگ را می‌توان به طور چگال در یک جبر بولی کامل نشاند صورت می‌پذیرد. سپس به معرفی فورسینگ از دیدگاه توپولوژی می‌پردازیم و ارتباط آن را با روش مجموعه‌های جزئاً مرتب می‌آوریم. نشان خواهیم داد رابطه فورسینگ که از دیدگاه توپولوژیکی معرفی می شود با رابطه فورسینگ که از دیدگاه مجموعه‌های جزئاً مرتب تعریف شده یکی است و بنابراین این دو روش اساسا یکی هستند. سرانجام به معرفی فورسینگ از دیدگاه نظریه رسته‌ها پرداخته و ارتباط آن را با روش مدل‌های جبر بولی–مقدار می‌آوریم. نشان می دهیم که برای یک

* عضو هیئت علمی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، تهران، etesami@gmail.com
** عضو هیئت علمی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، تهران (نویسندهٔ مسئول)، golshani.m@gmail.com
*** عضو هیئت علمی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، تهران، sh.mohsenipour@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲٦، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰٤/۱۱

جبر بولی کامل رسته شیف‌های روی آن را می توان با جهان بولی مقدار ساخته شده توسط آن جبر بولی یکی گرفت.

کلیدواژه‌ها: فورسینگ، مدل‌های بولی‌مقدار، فیلتر ژنریک، رسته

۱. مقدمه

روش فورسینگ توسط پال کوهن در سال ۱۹۶۳ معرفی گردید و به کمک این روش کوهن نشان داد که فرضیه پیوستار کانتور توسط اصول موضوع زرملو-فرائنکل به همراه اصل انتخاب، ZFC، قابل اثبات نیست (کوهن [3]). امروزه روش فورسینگ به یکی از مهمترین ابزارهای نظریه مجموعه‌ها تبدیل شده و کاربردهای زیادی در بسیاری از شاخه-های دیگر ریاضیات نیز پیدا کرده است.

پس از معرفی روش فورسینگ توسط کوهن افراد زیادی این تئوری را از جنبه‌های گوناگون بررسی کردند. تعمیم روش کوهن برای مجموعه‌های جزئاً مرتب دلخواه توسط شنفیلد معرفی گردید. (شنفیلد [7]) سولوی و اسکات از طریق مدل‌های جبر بولی-مقدار به روش فورسینگ نزدیک شدند و همچنین افرادی مانند تاکئوتی و غیره از جنبه توپولوژیک به موضوع نگاه کردند. همچنین لاور و تیرنی از دیدگاه نظریه رسته‌ها به مفهوم فورسینگ پرداختند.

ما در این مقاله این روش‌های مختلف را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که همه آن‌ها منجر به یک تئوری می‌شوند. در بخش ۲ روش فورسینگ به کمک مجموعه‌های جزئاً مرتب را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳ روش مدل‌های جبر بولی-مقدار را می‌آوریم و ارتباط آن را با نتایج بخش ۲ می‌آوریم. در بخش ٤ به معرفی توپولوژیکی از فورسینگ می-پردازیم و ارتباط آن را با نتایج بخش‌های قبل بیان می‌کنیم. سرانجام در بخش ۵، به معرفی فورسینگ از دیدگاه نظریه رسته‌ها پرداخته و ارتباط آن را با روش مدل‌های جبر بولی-مقدار می‌آوریم.

۲. فورسینگ به کمک مجموعه‌های جزئاً مرتب

در این بخش روش اولیه کوهن که بعدها توسط شنفیلد و دیگران در حالات کلی معرفی شد را مرور می‌کنیم، و برای جزئیات بیشتر خواننده را به (یخ [4]) و (کونن [5]) ارجاع می‌دهیم. قبل از معرفی این روش کمی راجع به ایده کار صحبت می کنیم.

در سال ۱۹۳۸ کورت گودل نشان داد که اگر اصول موضوع ZF سازگار باشند آنگاه می‌توان به این اصول اصل انتخاب وفرضیه پیوستار کانتور را اضافه کرد و همچنان یک تئوری سازگار داشت. برای این منظور گودل نشان داد که یک جهان درونی ساخت‌پذیراز نظریه مجموعه‌ها، که امروزه جهان ساخت پذیر گودل نامیده می شود، وجود دارد که در آن علاوه بر اصول موضوع ZF اصل انتخاب وفرضیه پیوستارنیز درست هستند. بعدها مشخص شد که از روش مدل‌های درونی برای اثبات سازگاری نقیض فرضیه پیوستار نمی-توان استفاده کرد. در سال ۱۹٦۳ پال کوهن روش جدیدی برای بوجود آوردن یک مدل از ZFC به کمک یک مدل دیگر از آن ارائه کرد که بر خلاف روش گودل مدل اولیه را گسترش می داد. بنابراین در این روش ما با یک مدل M از نظریه مجموعه‌ها شروع می کنیم و آن را به یک مدل M[G] گسترش می دهیم که در حقیقت کوچکترین مدل از ZFC است که شامل M بوده و مجموعه G را نیز در بر دارد. اهمیت روش فورسینگ در این است که این اضافه کردن مجموعه G را به قسمی انجام می دهد که مدل جدید تولید شده همچنان مدلی از ZFC باقی می‌ماند و می‌توان خواص مدل M[G] را در داخل ساختار M بررسی کرد. از آنجایی که جهان اولیه M برای ما شناخته شده است ما می‌توانیم خواص مدل M[G] را نیز بدست آوریم.

در بررسی فورسینگ معمولا با یک مدل متعدی شمارا از ZFC شروع می کنیم ولی از آنجایی که شمارا بودن تنها برای اثبات وجود فیلتر ژنریک مورد استفاده قرار می‌گیرد می-توانیم مدل M را با کلاس V از تمام مجموعه‌ها جایگزین کنیم.

تعریف. یک مفهوم فورسینگ عبارت است از یک مجموعه جزئاً مرتب $(\mathbb{P},\leq)$که دارای بزرگترین عضو $1_{\mathbb{P}}$ است.

فرض کنید $(\mathbb{P},\leq)$ یک مفهوم فورسینگ است، $p,q\in\mathbb{P}$ و $D,G\subseteq\mathbb{P}$. می‌گوئیم:

- شرط p از شرط q قویتر است هرگاه $p\leq q$.

- $D \subseteq \mathbb{P}$ در $\mathbb{P}$ چگال است هرگاه برای هر $p \in \mathbb{P}$ بتوان یک $q \in D$ یافت به قسمی که $q \leq p$.
- $G \subseteq \mathbb{P}$ یک فیلتر است هرگاه $1_{\mathbb{P}} \in G$، اگر $p \in G$ و $p \leq q$ آنگاه $q \in G$، و به ازای هر $p, q \in G$ عضو دیگری مانند $r \in G$ موجود باشد به قسمی که $r \leq p, q$ (می‌گوئیم p و q سازگار هستند).
- فیلتر G را یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی V گوئیم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه چگال $D \subseteq \mathbb{P}$ در V داشته باشیم $G \cap D \neq \emptyset$.

حال فرض کنید که $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ و G یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی V باشد. در این صورت قضیه اساسی فورسینگ بیان می‌کند که یک مدل $V[G]$ از ZFC وجود دارد به قسمی که:

۱. $V \subseteq V[G]$ و $G \in V[G]$.

۲. V مدل‌های و $V[G]$ دارای اردینال‌های یکسان هستند.

۳. $V[G]$ کوچکترین مدلی از ZFC است که در شرایط (۱) و (۲) بالا صدق می‌کند.

٤. یک نگاشت پوشا مانند $i_G: V \to V[G]$ وجود دارد که در $V[G]$ از روی پارامتر G تعریف شده است. به علاوه اگر $i_G(a) = v$ آنگاه a یک نام برای v نامیده می‌شود.

مدل $V[G]$ را یک گسترش ژنریک از V می‌نامیم.

یکی از نکات مهم و اساسی در روش فورسینگ این است که مساله صدق در $V[G]$ را می‌توان به مساله صدق در V تحویل کرد و این موضوع از اهمیت زیادی برخوردار است. درحقیقت به ازای هر فرمول $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ از زبان نظریه مجموعه‌ها، که شامل متغیرهای $v_1, \ldots, v_n$ است، می‌توان فرمولی مانند $\varphi^*(v_1, \ldots, v_n, p, \mathbb{P})$ پیدا کرد به قسمی که به ازای هر فورسینگ $\mathbb{P}$، هر $p \in \mathbb{P}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in V$،

$$V \vDash \varphi^*(v_1, \ldots, v_n, p, \mathbb{P})$$

اگر و تنها اگر به ازای هر فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک G روی V که شامل p است داشته باشیم

$$V[G] \vDash \varphi\big(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n)\big).$$

فرمول $V \vDash \varphi^{*}(v_1, \dots, v_n, p, \mathbb{P})$ را معمولاً به شکل

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

می‌نویسیم. می‌توان نشان داد که

$$\exists p \in G, p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

اگر و تنها اگر

$$V[G] \vDash \varphi\big(i_G(a_1), \dots, i_G(a_n)\big).$$

مثال ۲.۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ مجموعه تمام توابع $P: dom(P) \to \{0,1\}$ باشد که $dom(P)$ یک زیرمجموعه متناهی از اعداد طبیعی ω می‌باشد. $\mathbb{P}$ را توسط عکس شمول جزئاً مرتب کنید. در این صورت $(\mathbb{P}, \supseteq)$ یک مفهوم فورسینگ با بزرگترین عضو $1_{\mathbb{P}} = \emptyset$ است. فرض کنید که $G \subseteq \mathbb{P}$ یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی V باشد وقرار دهید $f_G = \bigcup_{P \in G} P$. در این صورت:

۱. f_G تابعی از ω به توی $\{0,1\}$ است.

۲. به ازای هر تابع $g: \omega \to \{0,1\}$ که $g \in V$ داریم $f_G \neq g$.

برای اثبات (۱) توجه شود که چون G یک فیلتر است f_G یک تابع می‌باشد. همچنین به ازای هر عدد طبیعی n مجموعه

$$\{p \in \mathbb{P}: n \in dom(p)\}$$

در $\mathbb{P}$ چگال است که از آن نتیجه می‌شود $n \in dom(f_G)$.

حکم (۲) نیز به طریق مشابه ثابت می شود. اگر $g \in V$، آنگاه مجموعه

$$\{p \in \mathbb{P}: \exists n \in dom(p), p(n) \neq g(n)\}$$

در $\mathbb{P}$ چگال است که از آن نتیجه می‌شود $f_G \neq g$. بنابراین $f_G \notin V$ و $V[G]$ به صورت سره شامل V است.

دو مفهوم فورسینگ $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ را هم‌ارز نامیم و با $\mathbb{P} \equiv \mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم هرگاه گسترش‌های ژنریک یکسانی بدهند، بدین معنا که به ازای هر فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک G روی V بتوان یک فیلتر $\mathbb{Q}$-ژنریک H روی V یافت به قسمی که $V[G] = V[H]$ وبرعکس، به ازای هر فیلتر $\mathbb{Q}$-

ژنریک H روی V بتوان فیلتر $\mathbb{P}$–ژنریک G روی V را یافت به گونـه‌ای کـه $V[G] = V[H]$.
به عنوان مثال می‌توان نشان داد:

۱. هر مجموعه کلا مرتب با فورسینگ بدیهی $\mathbb{P} = \{1_{\mathbb{P}}\}$ هم‌ارز می‌باشد.

۲. هر مفهوم فورسینگ شمارا یا با مفهوم فورسینگ مثال 2.1 هـم‌ارز اسـت یـا اینکـه بـا مفهوم فورسینگ بدیهی $\mathbb{P} = \{1_{\mathbb{P}}\}$ هم‌ارز می‌باشد.

مفهوم فورسینگ $\mathbb{P}$ را جدایی‌پذیر نامیم هرگاه بـه ازای هـر $p, q \in \mathbb{P}$ اگـر $p \nleq q$ بتـوان $r \leq p$ را به قسمی یافت که r و q سازگار نیستند (یعنی هیچ عضوی از $\mathbb{P}$ که $\leq r, q$ باشـد موجود نیست).

می‌توان نشان داد که هر مفهوم فورسینگ با یک مفهـوم فورسـینگ جـدایی‌پـذیر هـم‌ارز است و بنابراین ما همواره فرض می‌کنیم که فورسینگ‌هایی که در نظر می‌گیریم جدایی‌پـذیر و نابدیهی هستند (می‌توان نشان داد که نابدیهی بودن فورسینگ معادل ایـن اسـت کـه بـرای هر $p \in \mathbb{P}$ می‌توان $q, r \leq p$ یافت به قسمی که q و rناسازگارند).

۳. روش مدل‌های جبر بولی–مقدار

فرض کنید که $\mathbb{B}$ یک جبر بولی کامل است. ما جهان بولی–مقـدار $V^{\mathbb{B}}$ را بـه صـورت زیـر تعریف می‌کنیم:

$$V_0^{\mathbb{B}} = \emptyset$$
$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} = \{f\colon\ f\colon V_\alpha^{\mathbb{B}} \to \mathbb{B}\}$$
$$V_\delta^{\mathbb{B}} = \cup_{\alpha<\delta} V_\alpha^{\mathbb{B}},\ \text{(اگر } \delta \text{ یک اردینال حدی باشد)}$$
$$V^{\mathbb{B}} = \bigcup_\alpha V_\alpha^{\mathbb{B}}$$

حال به ازای هر فرمول φ در زبان نظریه مجموعه، ارزش بولی φ را که با $\| \varphi \|_{\mathbb{B}}$ یـا به طور ساده‌تر با $\| \varphi \|$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر و از طریـق بازگشـتی تعریـف می‌کنیم:

$$\| x \in y \| = \sum_{t \in dom(y)} \| x = t \| \wedge y(t)$$
$$\| x \subseteq y \| = \prod_{t \in dom(y)} x(t) \Rightarrow \| t \in y \|$$
$$\| x = y \| = \| x \subseteq y \| \wedge \| y \subseteq x \|$$
$$\| \neg \varphi \| = \neg \| \varphi \|$$
$$\| \varphi \wedge \psi \| = \| \varphi \| \wedge \| \psi \|$$
$$\| \exists x \, \varphi(x) \| = \sum_{a \in V} \| \varphi(a) \|$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که $V^{\mathbb{B}}$ یک مدل بولی–مقدار از ZFCاست.

قضیه ۳.۱. به ازای هر جمله φ از ZFCو هر جبر بولی کامل $\mathbb{B}$، $\| \varphi \|_{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}}$.

برای جزئیات بیشتر به مراجع (بل [1]) و (یخ [4]) ارجاع شود.

به منظور اینکه ارتباط بین روش فورسینگ معرفی شده در بخش ۲ را با روش جبر بولی–مقدار بدست آوریم، به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۳.۲.فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ نابدیهی و جدایی‌پذیر است. در این صورت یک جبر بولی کامل $\mathbb{B} = Ro(\mathbb{P})$ و یک نشاندن $e: \mathbb{P} \to \mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$ وجود دارد به قسمی که

۱. اگر $p \leq_{\mathbb{P}} q$ آنگاه $e(p) \leq_{\mathbb{B}} e(q)$.

۲. p و q در $\mathbb{P}$ ناسازگارند اگر و تنها اگر $e(p) \wedge e(q) = 0_{\mathbb{B}}$.

۳. $e[\mathbb{P}] = \{e(p): p \in \mathbb{P}\}$ در $\mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$ چگال است.

٤. $\mathbb{B}$ تا حد یکریختی یکتاست.

از لم بالا نتیجه می‌شود که $\mathbb{P}$ و $\mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$ هم‌ارز هستند. به علاوه می‌توان نشان داد که به ازای هر $p \in \mathbb{P}$ و هر فرمول φ

$e(p) \leq \| \varphi \|$ اگر و تنها اگر $p \Vdash \varphi$.

بنابراین

$$\| \varphi \| = \sum_{a \in V} \left\{ e(p) : p \Vdash \varphi \right\}.$$

حال فرض کنید $\mathbb{P}$ و $\mathbb{B}$ همانند در لم ۳.۲ باشند و فرض کنید که G یک فیلتر $\mathbb{P}$–ژنریک روی V است. قرار دهید

$$G^* = \{b \in \mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\} : \exists p \in G, e(p) \leq b\}.$$

در این صورت G^* یک فیلتر $\mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$–ژنریک روی V است و $V[G] = V[G^*]$. رابطه‌های $=_{G^*}$ و E_{G^*} روی $V^{\mathbb{B}}$ را با

$x =_{G^*} y$ اگر و تنها اگر $\| x = y \| \in G^*$

$x \ E_{G^*} \ y$ اگر و تنها اگر $\| x \in y \| \in G^*$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $=_{G^*}$ و E_{G^*} رابطه هم‌ارزی روی $V^{\mathbb{B}}$ هستند. فرض کنید $[x]$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی x نسبت به $=_{G^*}$ باشد و قرار دهید

$$V^{\mathbb{B}} / G^* = \{[x] : x \in V^{\mathbb{B}}\}.$$

در این صورت می‌توان نشان داد که به ازای هر فرمول φ

$\varphi V^{\mathbb{B}} / G^* \vDash$ اگر و تنها اگر $\| \varphi \| \in G^*$

و بویژه آنکه $V^{\mathbb{B}} / G^*$ مدلی از ZFCاست. حال فرض کنید که

$$\pi : V^{\mathbb{B}} / G^* \to W$$

تابع فروپاشی موستوفسکی بتوی مدل متعدی W باشد. آنگاه $W = V[G]$ و بنابراین مدل‌های $V^{\mathbb{B}} / G^*$ و $V[G]$ با هم یکریخت هستند. همچنین تحت فرض‌های بالا

$\exists p \in G, \ p \Vdash \varphi$. اگر و تنها اگر $\| \varphi \| \in G^*$

روابط بالا نشان می‌دهند که در حد هم‌ارزی فورسینگ، روش فورسینگ به کمک مجموعه‌های جزئا مرتب و روش مدل‌های جبر بولی–مقدار یکی هستند.

٤. فورسینگ از نگاه توپولوژیک

در این بخش از نگاه توپولوژیک به معرفی فورسینگ می‌پردازیم و مجدداً نشان می‌دهیم که با روش معرفی‌شده در بخش ۲ معادل است. در اینجا ما مجدداً با مجموعه‌های جزئاً مرتب کار می‌کنیم اما نحوه تعریف رابطه فورسینگ $\Vdash$ متفاوت خواهد بود و از دیدگاه

توپولوژیک خواهد بود. برای جزئیات بیشتر مطالب زیر مرجع (موستوسکی [6]) پیشنهاد می‌گردد.

بنابراین فرض کنید $(\mathbb{P},\leq)$ یک مفهوم فورسینگ است و $\mathcal{F}$را مجموعه تمام فیلترهای روی $\mathbb{P}$ در نظر بگیرید. به ازای هر $p\in\mathbb{P}$ قرار دهید $N_p=\{G\in\mathcal{F}: p\in G\}$. در این صورت $\{N_p: p\in G\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathcal{F}$ تشکیل می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که مجموعه $C\subseteq\mathcal{F}$ را یک مجموعه از رسته اول می‌نامیم هرگاه C اجتماع شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال باشد. $C\subseteq\mathcal{F}$ را یک مجموعه از رسته دوم می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}\setminus C$ از رسته اول باشد یا به طور معادل C برابر با اشتراک تعداد شمارا از مجموعه‌های باز چگال باشد.

لم ۴.۱.اگر $C\subseteq\mathcal{F}$ از رسته دوم باشد آنگاه C در $\mathcal{F}$ چگال است.

حال رابطه فورسینگ $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$ را به ازای $p\in\mathbb{P}$ و $a_1,\dots,a_n\in V$ بصورت $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$ اگر و تنها اگر مجموعه

$$\left\{G\in\mathcal{F}: V[G]\vDash\varphi\big(i_G(a_1),\dots,i_G(a_n)\big)\right\}$$

در N_p از رسته دوم است، تعریف می‌کنیم. برای اینکه ارتباط بین رابطه تعریف شده $\Vdash_{\mathbb{P}}$ در بخش ۲ را با رابطه $\Vdash^t_{\mathbb{P}}$ که در بالا تعریف شد پیدا کنیم احتیاج به یک سری لم داریم.

لم ۴.۲. فرض کنید $\{q\in\mathbb{P}: q\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)\}$ قبل از p چگال است (یعنی به ازای هر $r\leq p$ یک $q\leq r$ هست که $q\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$). آنگاه $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$.

لم ۴.۳. فرض کنید G یک فیلتر $\mathbb{P}$-ژنریک روی Vاست، $p\in\mathbb{P}$، $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ یک فرمول می‌باشد و $a_1,\dots,a_n\in V$.

a. اگر $p\in G$ و $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$، آنگاه $V[G]\vDash\varphi\big(i_G(a_1),\dots,i_G(a_n)\big)$.

b. اگر $V[G]\vDash\varphi\big(i_G(a_1),\dots,i_G(a_n)\big)$ آنگاه یک $p\in G$ وجود دارد به قسمی که $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$.

بنابراین می‌توانیم ارتباط بین رابطه‌های $\Vdash_{\mathbb{P}}$ و $\Vdash^t_{\mathbb{P}}$ را به صورت زیر بیان کنیم:

لم ۴.۴. $p\Vdash^t_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$ اگر و تنها اگر $p\Vdash_{\mathbb{P}}\varphi(a_1,\dots,a_n)$.

برهان. ابتدا فرض کنید $p \Vdash^{t}_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$ و فـرض کنیـد G یـک فیلتـر $\mathbb{P}$-ژنریـک روی Vاست به قسمی که $p \in G$. بنابر لم ۳.٤(a) $V[G] \vDash \varphi\big(i_G(a_1), \dots, i_G(a_n)\big)$. بنـابراین چون G دلخواه بود از تعریف رابطه $\Vdash_{\mathbb{P}}$ نتیجه می‌شود که $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

برعکس فرض کنید که $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$. آنگاه

$$D = \{G \in \mathcal{F}: V[G] \vDash \varphi\big(i_G(a_1), \dots, i_G(a_n)\big)\} \supseteq N_p$$

و لذا D در N_p از رسته دوم است که نتیجه می‌دهد $p \Vdash^{t}_{\mathbb{P}} \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

۵. فورسینگ از دیدگاه نظریه رسته‌ها

در این بخش پایانی فورسینگ را از دیدگاه نظریه رسته‌هـا مـورد بررسـی قـرار مـی‌دهـیم و ارتباط آن را با مطالب بخش‌های قبل می‌آوریم. اثبات رسـته‌ای از اسـتقلال فرضـیه پیوسـتار نخست توسط لاور تیرنی ارائه شد (تیرنی [8]).

فرض کنید $(\mathbb{P}, \leq)$یک مفهوم فورسینگ است. به ازای هر$p \in \mathbb{P}$ قرار می‌دهیم

$$\mathbb{P}/p = \{q \in \mathbb{P}: q \leq p\}.$$

زیرمجموعه $S \subseteq \mathbb{P}/p$ را یک سیو روی p نامیم هرگاه S در $\mathbb{P}/p$ باز باشد یعنی بـه ازای هر $q \in S$ و $r \in \mathbb{P}$ اگر $r \leq q$، آنگاه $r \in S$.

تعریف ۵.۱.یک خانواده $\{J(p)\}_{p\in\mathbb{P}}$ از سیوهای روی p را یـک توپولـوژی گروتنـدیک می‌نامیم هرگاه:

a. $\mathbb{P}/p \in J(p)$.

b. اگر $q \leq p$ و $S \in J(p)$ آنگاه $S \cap \mathbb{P}/q \in J(q)$.

اگر $S \in J(p)$ و T یک سیو روی p باشد به قسمی کـه بـه ازای هـر $r \in S$، اگـر داشـته باشیم $T \cap \mathbb{P}/r \in J(r)$آنگاه $T \in J(p)$.

یک سایت عبارت است از یک زوج مرتب $(\mathbb{P}, J)$کـه در آن $\mathbb{P}$ یـک مفهـوم فورسـینگ است و $J = \{J(p)\}_{p\in\mathbb{P}}$ یک توپولوژی گروتندیک می باشد.

مثال ۵.۲. فرض کنید $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ است و $J(P)$ را با

S در $\mathbb{P}/p$ چگال است   اگر و تنها اگر $S \in J(p)$

تعریف کنید. آنگاه $(\mathbb{P},J)$ یک سایت است.

تعریف ۵.۳. یک شیف F روی سایت $(\mathbb{P},J)$ عبارت است از

- یک خانواده $\{F(p)\}_{p\in\mathbb{P}}$ از مجموعه‌ها به همراه
- یک خانواده $\{F_{p,q}: F(q) \to F(p)\}_{p\leq q}$ از نگاشت‌ها به قسمی که

a. $F_{p,p} = id$ و $F_{r,q} \circ F_{q,p} = F_{r,p}$.

b. به ازای هر $p \in \mathbb{P}$، $S \in J(p)$ و دنباله $a_r \in F(r)$، به ازای $r \in S$، داریم $F_{r,p}(a) = a_r$.

فرض کنید $Sh(\mathbb{P},J)$ رسته تمام شیف‌های روی $(\mathbb{P},J)$ باشد.

حال به ارتباط بحث بالا با نظریه فورسینگ می‌پردازیم. براساس نتایج بخش ۳ می‌توانیم مفهوم فورسینگ $\mathbb{P}$ را با جبر بولی کامل $\mathbb{B} = Ro(\mathbb{P})$ جایگزین کنیم. توپولوژی گروتندیک J روی $\mathbb{B}$ را با

$\sum_{b\in S} b = a$ اگر و تنها اگر $S \in J(a)$

تعریف می‌کنیم. قضیه زیر از هیگز ارتباط بین $Sh(\mathbb{B},J)$ و $V^{\mathbb{B}}$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۴. $Sh(\mathbb{B},J)$ و $V^{\mathbb{B}}$ به عنوان رسته با هم معادلند.

برهان. ما فقط تابع یکریختی را معرفی می‌کنیم و برای جزئیات بیشتر به (بلاس، سدروف [2]) ارجاع می‌دهیم. برای این منظور $H: V^{\mathbb{B}} \to Sh(\mathbb{B},J)$ را به طور زیر تعریف کنید: به ازای هر $x \in V^{\mathbb{B}}$ و هر $b \in \mathbb{B}$ قرار دهید:

$$\mathrm{H(x)(b)} = \{y \in V^{\mathbb{B}} : \| y \in x \| \geq b\}/\sim_b$$

که رابطه هم‌ارزی $\sim_b$ توسط

$\| y_1 = y_2 \| \geq b$ اگر و تنها اگر $y_1 \sim_b y_2$

تعریف شده است. می‌توان نشان داد که نگاشت H یک یکریختی بین $V^{\mathbb{B}}$ و $Sh\left(\mathbb{B},J\right)$ تعریف می‌کند. برای جزئیات بیشتر اثبات به (بلاس، سدروف [2]) مراجعه شود.

در حقیقت می‌توان کمی فراتر رفت و با خود مفهوم فورسینگ اولیه $\mathbb{P}$ کـار کرد.بنـابراین فرض کنید که $\mathbb{P}$ یک مفهوم فورسینگ دلخواه اسـت و قـرار دهیـد $\mathbb{B} = Ro(\mathbb{P})$. مـی‌تـوان فرض کرد که $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{B} \setminus \{0_{\mathbb{B}}\}$. فرض کنید $J_{\mathbb{B}}$ توپولوژی گروتنـدیک روی $\mathbb{B}$ معرفـی شـده در بالا باشد و فرض کنید که $J_{\mathbb{P}}$ توپولوژی القایی روی $\mathbb{P}$ باشد. در ایـن صـورت مـی‌تـوان نشان داد که $J_{\mathbb{P}}$ همان توپولوژی نقیض مضاعف روی $\mathbb{P}$ است و لذا

$$Sh(\mathbb{B}, J) \cong Sh_{\neg\neg}(\mathbb{P}, J_{\mathbb{P}})V^{\mathbb{B}}$$

که در اینجا $\cong$ هم ارزی رسته‌ها را نشان می‌دهد.

٦. نتیجه گیری

ما در این مقاله به معرفی فورسینگ از دیدگاه‌های زیر پرداختیم:

۱. مجموعه‌های جزئاً مرتب.

۲. مدل‌های جبر بولی-مقدار.

۳. توپولوژی.

٤. نظریه رسته‌ها.

همچنین نشان دادیم که همه آنها با هم معادل هستند.

کتاب‌نامه

Bell, J. L.;Boolean-valued models and independence proofs in set theory.Second edition. With a foreword by Dana Scott. Oxford Logic Guides, 12.The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985. xx+165 pp. ISBN: 0-19-853241-5

Blass, Andreas; Scedrov, Andre; Freyd's models for the independence of the axiom of choice.Mem. Amer. Math. Soc. 79 (1989), no. 404, viii+134 pp.

Cohen, Paul J.; Set theory and the continuum hypothesis. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1966 vi+154 pp.

Jech, Thomas; Set theory. Pure and Applied Mathematics. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. xi+621 pp.

Kunen, Kenneth; Set theory. An introduction to independence proofs. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. xvi+313 pp. ISBN: 0-444-85401-0

Mostowski, A.; Constructible sets with applications.Studies in Logic and the Foundations of Mathematics North-Holland Publishing Co., Amsterdam; PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw1969 ix+269 pp.

Shoenfield, J. R.; Unramified forcing. 1971 Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967) pp. 357–381 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Tierney, Myles; Sheaf theory and the continuum hypothesis. Toposes, algebraic geometry and logic (Conf., Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1971), pp. 13–42. Lecture Notes in Math., Vol. 274, Springer, Berlin, 1972.