Research in Logics, **Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)**
Biannual Journal, Vol. 11, No. 1, Spring and Summer 2020, 131-150
DOI: 10.30465/lsj.2021.33406.1314

Introduction of different semantics for intuitionistic logic

Fatemeh Shirmohammadzadeh Maleki*

Abstract

Intuitionistic logic is a non-classical logic obtained by omitting the axiom of excluded middle from classical logic. This logic was created by philosophical motivation towards the foundation of mathematics. There are several semantics for intuitionistic logic (such as Kripke semantics, neighborhood semantics and topological semantics) that are sound and complete. In this paper, we first present two new neighborhood semantics for propositional intuitionistic logic (IPC). Then we establish soundness and completeness of IPC with respect to these new neighborhood semantics. The relation between neighborhood and topological semantics are also investigated. One of these new neighborhood semantics is introduced with a somewhat more complex definition than the usual neighborhood semantics which was introduced before. This semantics is called NB-neighborhood semantics. In order to establish completeness with respect to NB-neighborhood semantics for IPC, first we need to introduce a system WF of subintuitionistic logic, weaker than Corsi's basic subintuitionistic system F.

Keywords: Intuitionistic logic, Subintuitionistic logic, Kripke semantics, Topological semantics, Neighbourhood semantics

---

* PhD in Pure Mathematics from Beheshti University, f.shmaleki2012@yahoo.com

Date received: 2020/05/04, Date of acceptance: 2020/08/04

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ مروری)، سال یازدهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۹، ۱۳۳–۱۵۰

معرفی معناشناسی‌های مختلف برای منطق شهودی

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی*

چکیده

منطق شهودی گزاره‌ای منطقی غیرکلاسیک است که از حذف اصل طرد شق ثالث از منطق کلاسیک حاصل می شود. چند معناشناسی مختلف، مانند معناشناسی کریپکی، توپولوژیکی و همسایگی برای منطق شهودی گزاره ای وجود دارد که قضایای درستی و تمامیت برای آنها اثبات شده است. در این مقاله ابتدا برخی از این معناشناسی ها رابررسی می کنیم، سپس دو معناشناسی همسایگی جدیدی را که یکی از این معناشناسی ها تا حدی پیچیده‌تر از معناشناسی‌های همسایگی شناخته شده قبلی می‌باشد را برای منطق گزاره‌ای شهودی (IPC) معرفی می‌کنیم. در نهایت قضایای درستی و تمامیت را با روشهای متفاوتی نسبت به این دو معناشناسی همسایگی جدید اثبات می کنیم. برای اثبات تمامیت یکی از این معناشناسی ها که NB-همسایگی می نامیم، ابتدا نیاز داریم تا دستگاه زیرشهودی WF را که ضعیف‌تر از دستگاههای زیر شهودی شناخته شده قبلی مانند F می‌باشد را معرفی کنیم. سپس با استفاده از قصیه تمامیت منطق WF نسبت به معناشناسی NB-همسایگی، نشان خواهیم داد که منطق شهودی IPC نسبت به این معناشناسی با افزودن برخی ویژگی‌های خاص درست و تمام است.

کلیدواژه‌ها: منطق شهودی، منطق زیرشهودی، معناشناسی کریپکی، معناشناسی توپولوژیکی، معناشناسی همسایگی

* دکترای ریاضی محض، دانشگاه بهشتی، f.shmaleki2012@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱٤

۱. مقدمه

در منطق کلاسیک، هر گزاره ای یا راست است و یا دروغ، بنابراین گزاره (Av¬A) راست در نظر گرفته می‌شود، اما در منطق شهودی وضعیت متفاوت است. در این منطق یک گزاره راست است هرگاه اثباتی برای آن موجود باشد، لذا ممکن است نه A و نه ¬A راست نباشد. به بیان دیگر اصل طرد شق ثالث (Av¬A) در منطق شهودگرایانه معتبر نیست و استفاده از این اصل در استنتاج‌های شهودگرایانه مجاز نمی‌باشد.

چند معناشناسی برای منطق شهودی وجود دارد که قضایای درستی و تمامیت برای آنها برقرار است .نخستین بار معناشناسی کریپکی برای منطق موجهات و منطق شهودی توسط ساؤل کریپکی(Kripke Saul) ابداع و در مجموعه مقالات وی در سالهای ۱۹۵۹–۱۹٦٥ ارائه شد. وی قضایای درستی و تمامیت را برای آنها اثبات کرد.

دستگاه‌های کلاسیک (غیر نرمال) منطق‌های وجهی هستند که از دستگاه‌های نرمال ضعیف‌ترند و برای مطالعه منطق‌های وجهی گسترده‌تری مناسب هستند. معناشناسی کریپکی یا رابطه‌ای برای مطالعه‌ی این دستگاه‌ها مناسب نیست، زیرا اصولی را معتبر می‌سازد که در این دستگاه‌ها در حالت کلی معتبر نیستند.

در سال ۱۹۷۰ دِینا اسکات(Dana Scott) و ریچارد مونتاگ(Richard Montague) معناشناسی جدیدی را معرفی کردند که برای بررسی منطق‌های وجهی کلاسیک مناسب است. این معناشناسی که گسترشی از معناشناسی کریپکی است به معناشناسی همسایگی معروف شده است. در مدل‌های همسایگی برای منطق وجهی، به هر حالتی، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های جهان نسبت داده می‌شود که همسایگی آن حالت نامیده می‌شود و فرمول وجهی □A در جهان w درست است اگر و تنها اگر مجموعه جهان‌هایی که در آنها A درست است یک همسایگی از w باشد (چلاس [۲]).

منیری و شیرمحمدزاده در سال ۲۰۱۵ معناشناسی همسایگی را برای منطق IPC و BPC معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را برای آنها ثابت کردند (منیری [۳]). سپس شیرمحمدزاده و دیک دیانگ(Dick de Jongh) با استفاده از ایده قبلی، منطق زیر شهودی WF را که ضعیف‌تر از منطق زیرشهودی F (کرسی [۱]) می‌باشد را معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را برای این منطق و برخی منطق‌های مابین WF و F را اثبات کردند (شیرمحمدزاده [۵]).

در این مقاله دو نوع معناشناسی همسایگی جدید را برای منطق شهودی معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را برای آن دو اثبات خواهیم کرد. معرفی معناشناسی‌های همسایگی متفاوت ممکن است منجر به پیدایش منطق‌های زیر شهودی جدیدی شود، به‌طوری‌که در روند تحقیقات منطقی، فلسفی و یا علوم کامپیوتر در آینده مفید واقع شوند.

در بخش ۲ از این مقاله معناشناسی‌های مختلف برای منطق شهودی را که قبلا قضایای درستی و تمامیت برای آنها اثبات شده را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، معناشناسی همسایگی دوم برای منطق شهودی را معرفی کرده و رابطه آن با معناشناسی توپولوژیکی را بیان میکنیم. در بخش ٤، NB–همسایگی برای منطق شهودی را معرفی و قضایای درستی و تمامیت را برای این منطق اثبات می‌کنیم.

۲. منطق شهودی

در این بخش به اختصار مروری بر تعاریف و قضایای مقدماتی منطق گزاره‌ای شهودی IPC خواهیم داشت. زبان منطق IPC همان زبان منطق گزاره‌ای کلاسیک است: $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \top, \bot\}$. علاوه براین‌ها، تعداد نامتناهی (شمارا) متغیر اتمی در زبان منطق گزاره‌ای داریم: $\dots, p_2, p_1$. همچنین $\neg A$ اختصاری برای $A \rightarrow \bot$ و $A \leftrightarrow B$ اختصاری برای $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ می‌باشند.

۱.۲ دستگاه استنتاج طبیعی و اصل موضوعی برای IPC

دستگاه استنتاج طبیعی فقط قاعده دارد. قواعد دستگاه استنتاج طبیعی برای IPC به صورت زیر است:

(الف)

$$\frac{\bot}{A} \quad (\bot E) \qquad \frac{B}{A \vee B} \quad \frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I) \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad (\wedge I)$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \quad \frac{A \wedge B}{A} \quad (\wedge E) \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (\rightarrow E)$$

(ب)

$$\dfrac{\begin{matrix}[B] & [A] \\ \vdots & \vdots \\ C & C\end{matrix} \quad A \vee B}{C}\ (\vee E) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I)$$

توجه کنید که قواعد گروه (ب) فرض‌های خود را می‌بندند. برای یک مجموعـه‌ی Γ از فرمول‌ها و یک فرمول A گوییم A در IPC از Γ استنتاج پـذیر اسـت و مـی‌نویسـیم $\Gamma \vdash A$ هرگاه استنتاج برای A به کمک قواعد IPC موجود باشد، بگونـه‌ای کـه همـه‌ی فـرض‌هـای بسته شده‌ی آن عضو Γ باشند.

اصول موضوعه و قواعد IPC در دستگاه هیلبرت (HP) به صورت زیر است:

۱. $A \to A \vee B$

۲. $B \to A \vee B$

۳. $A \wedge B \to A$

٤. $A \wedge B \to B$

۵. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

٦. $A \to (B \to (A \wedge B))$

۷. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

۸. $A \to (B \to A)$

۹. $(A \to B) \to \big((C \to B) \to (A \vee C \to B)\big)$

۱۰. $\bot \to A$

برای جزییات بیشتر راجع به این بخش به مرجع (ون دالن [6]) ارجاع شود.

چند معناشناسی برای منطق گزاره‌ای شهودی وجود دارد که قضایای درسـتی و تمامیـت برای آنها برقرار است،

در ادامه به معرفی این معناشناسی‌ها خواهیم پرداخت.

۲.۲ معناشناسی کریپکی

تعریف 2.1. یک مدل کریپکی $\mathcal{M}$ برای IPC عبارت است از یک سه تایی مرتـب $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$، با خواص زیر:

۱. W یک مجموعه‌ی ناتهی است، به اعضای این مجموعه جهان، یا حالت می‌گوییم.

۲.$\leq$ یک رابطه‌ی دوتایی انعکاسی و متعدی است. به مجموعـه مرتـب $\langle W, \leq\rangle$، قـاب مرتب کریپکی گوییم.

۳. $\Vdash$ یک رابطه بین گزاره‌های اتمی $\mathbb{p}$ و جهان‌ها است ($\Vdash \subseteq W \times \mathbb{P}$)، طوری‌کـه اگـر $w \leq w'$ و $w \Vdash p$ آنگاه $w' \Vdash p$.

اکنون می‌توانیم رابطه‌ی $\Vdash$ را به تمامی گزاره‌ها به صورت زیر گسترش دهیم: (برای هـر $w \epsilon W$)

۱. $w \nVdash \perp$،

۲. $w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $w \Vdash A$ و $w \Vdash B$،

۳. $w \Vdash A \vee B$ اگر و تنها اگر $w \Vdash A$ یا $w \Vdash B$،

٤. $w \Vdash A \to B$ اگر و تنها اگـر بـرای هـر $w \leq w'$ داشـته باشـیم: اگـر $w' \Vdash A$ آنگـاه $w' \Vdash B$.

لم ۲.۲. (قضیه‌ی تمامیت) اگر در IPC، $\Gamma \nvdash A$ آنگاه یک مدل کریپکی شهودی با جهـان پایینی w موجود است که $w \Vdash \Gamma$ و $w \nVdash A$.

۳.۲ معناشناسی توپولوژیکی

تعریف ۲.۳. فرض کنید X مجموعه‌ای و Φ گردایـه‌ای از زیرمجموعـه‌هـای X باشـد، یعنـی $\Phi \subseteq \mathrm{P(X)}$(منظور از $P(X)$ مجموعـه تـوانی X اسـت). Φ را توپولـوژی در X خـوانیم در صورتی که شرایط سه‌گانه‌ی زیر را داشته باشد:

۱. $X \epsilon \Phi$ و $\emptyset \in \Phi$،

۲. همواره اگر $A, B \in \Phi$، آنگاه $A \cap B \in \Phi$،

۳. به ازای هر زیر گردایه Φ مانند Y، آنگاه $\cup \mathrm{Y} \in \Phi$.

اعضای Φ را مجموعه‌های باز نامیم. فرض کنیم $S \subseteq X$ باشد، در این صـورت مجموعـه داخلی S به صورت زیر تعریف می‌شود و با $Int(S)$ نمایش داده می‌شود،

$$Int(S) = \cup\{A \in \Phi : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}\}.$$

توپولوژی Φروی X الکساندروف (Alexandroff) نامیده می‌شود، اگر اشـتراک دلخـواه از خانواده‌های باز خود مجموعه‌ای باز باشد، یعنی اگـر $A \subseteq \Phi$ آنگـاه $\cap A \in \Phi$، یـا بـه طـور

معادل برای هر $x \in X$ کوچکترین مجموعه‌ی باز $U \in \Phi$ وجود داشته باشد بــه طـوری‌کـه $x \in U$ باشد.

تعریف ۲.٤. فرض کنید Xمجموعه‌ای و Φ یک توپولوژی در X باشد. در این صـورت زوج مرتب $\langle X, \Phi \rangle$ را یک فضای توپولوژیک نامیم.

تعریف ۲.۵. فرض کنیـد Xمجموعـه‌ای و Φ یـک الکسـاندروف در X باشـد. در ایـن صورت زوج مرتب $\langle X, \Phi \rangle$ را یک فضای الکساندروف نامیم.

تعریف ۲.٦. یک مدل مناسـب روی فضـای توپولوژیـک $\langle X, \Phi \rangle$ سـه تـایی $\langle X, \Phi, V \rangle$ است که در آن V تابع ارزشگذاری از $\mathbb{P}$ به Φ است. با استقراء این تابع را به مجموعـه همـه فرمولهای شهودی به صورت زیر گسترش داده می‌شود.

۱. $V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$،

۲. $V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B)$،

۳. $V(A \to B) = Int((X - V(A)) \cup V(B))$،

٤. $V(\neg A) = Int(X - V(A))$.

۴.۲ معناشناسی همسایگی اول

تعریف ۲.۷. (قاب همسایگی اول) قاب همسایگی اول برای IPC عبـارت اسـت از دوتـایی $\langle W, N \rangle$، به طوری‌کـه W یـک مجموعـه نـاتهی از جهـان‌هـا و $N: W \longrightarrow 2^{2^W}$ یـک تـابع همسایگی است به‌طوری که برای هر $w \in W$:

۱. $w \in \cap N(w)$،

۲. $\cap N(w) \in N(w)$،

۳. اگر $X \in N(w)$ و $X \subseteq Y$ آنگاه $Y \in N(w)$،

٤. اگر $X \in N(w)$ آنگاه $\{u \in W \mid X \in N(u)\} \in N(w)$.

تعریف ۲.۸. (مدل همسایگی اول) مدل همسایگی اول سـه‌تـایی $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ اسـت که در آن $\langle W, N \rangle$ یک قاب همسایگی و $V: \mathbb{p} \to 2^W$ تابع ارزشگذاری اسـت بـه‌طـوری‌کـه برای هر $w \epsilon W$ و $p \in \mathbb{p}$ اگر $w \in V(p)$ آنگاه $V(p) \in N(w)$.

تعریف ۲.۹. (درستی در مدل همسایگی اول) $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ را مدل همسایگی اول دلخواهی قرار می‌دهیم. تعریف درست بودن فرمول A در حالت $w \in W$ در مدل $\mathfrak{M}$ به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$،

۳. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ و $\mathfrak{M}, w \Vdash B$،

٤. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \vee B$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ یا $\mathfrak{M}, w \Vdash B$،

٥. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \to B$ اگر و تنها اگر $\left\{u \in W \middle| u \nVdash A \text{ یا } u \Vdash B\right\} \in N(w)$.

نتیجه ۲.۱۰. $w \Vdash \neg A$ اگر و تنها اگر $\{u \in W | u \nVdash A\} \in N(w)$.

با توجه به اینکه $V(A) = \{w \in W | w \Vdash A\}$ لم زیر را داریم:

لم ۲.۱۱. اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ آنگاه $V(A) \in N(w)$.

مثال ۲.۱۲. فرض کنید $W = \{w_1, w_2\}$ مجموعه جهان‌ها باشد و تابع همسایگی مدل $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که $N(w_1) = \{W\}$ و $N(w_2) = \{W, \{w_2\}\}$. حال فرض کنیم $V(p) = \{w_2\}$. در این صورت با توجه به مدل خواهیم داشت $\mathfrak{M}, w_1 \nVdash p \vee \neg p$ زیرا $w_1 \notin V(p)$ و $\{u \in W | u \nVdash p\} = \{w_1\} \notin N(w_1)$.

تعریف ۲.۱۳. یک مدل همسایگی و یک مدل کریپکی با مجموعه جهان‌های یکسان را هم ارز نقطه به نقطه گوییم هرگاه در هر جهانی از این مدل‌ها، فرمول‌های یکسانی درست باشند.

قضیه ۲.١٤. برای هر مدل کریپکی $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ یک مدل همسایگی اول $\langle W, N, V \rangle$ وجود دارد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

قضیه ۲.۱۵. برای هر مدل همسایگی اول $\langle W, N, V \rangle$ یک مدل کریپکی $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ وجود دارد، به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

قضیه ۲.١٦. (تمامیت) $\Gamma \Vdash A$ اگر و تنها اگر $\Gamma \vdash A$.

قضایای زیررابطه‌ی بین معناشناسی همسایگی اول و توپولوژیکی را بیان می‌کنند.

قضیه ۲.۱۷. برای هر فضای الکساندروف $\langle X, \Phi \rangle$ و $V: \mathbb{P} \to \Phi$ مدل همسایگی $\langle W, N, V \rangle$ وجود دارد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

قضیه ۲.۱۸. برای هر مدل همسایگی $\mathfrak{M} = \langle X, N, V \rangle$ فضای الکساندروف $\langle X, \Phi \rangle$ با ارزشگذاری V وجود دارد به طوری‌که هم‌ارز نقطه به نقطه با $\mathfrak{M}$ می‌باشد (یعنی برای هر فرمول A و $x \in X$: $x \in V(A)$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, x \Vdash A$).

برای جزییات بیشتر راجع به این بخش به مرجع (منیری [3]) ارجاع شود.

۳. معناشناسی همسایگی دوم برای IPC

در این بخش معناشناسی همسایگی دوم برای منطق شهودی گزاره‌ای را معرفی کرده و سپس قضایای درستی و تمامیت منطق شهودی نسبت به این معناشناسی را اثبات می‌کنیم.

تعریف ۳.۱. (قاب همسایگی دوم) قاب همسایگی دوم برای IPC عبارت است از دوتایی $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$به‌طوری‌که $\mathcal{W}$ یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و $\mathcal{N}: \mathcal{W} \to 2^{2^{\mathcal{W}}}$ یک تابع همسایگی است به‌طوری که برای هر $w \in \mathcal{W}$:

۱. وجود دارد $X \in \mathcal{N}(w)$ به طوری‌که $w \in X$،

۲. برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$ و $x \in X$، $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(w)$.

تعریف ۳.۲. (مدل همسایگی دوم) مدل همسایگی دوم سه‌تایی $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ است که در آن $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ یک قاب همسایگی و $V: \mathbb{p} \to 2^{\mathcal{W}}$ تابع ارزشگذاری است به‌طوری‌که برای هر $w \in W$ و $p \in \mathbb{P}$ اگر $w \in V(p)$، آنگاه برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، $X \subseteq V(p)$.

تعریف ۳.۳. (درستی در مدل همسایگی دوم) $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathrm{V} \rangle$ را مدل همسایگی دوم دلخواهی قرار می‌دهیم. تعریف درست بودن فرمول A در حالت $w \in \mathcal{W}$ در مدل $\mathcal{M}$ به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathcal{M}, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $\mathcal{M}, w \nVdash \bot$،

۳. $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}, w \Vdash A$ و $\mathcal{M}, w \Vdash B$،

٤. $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}, w \Vdash A$ یا $\mathcal{M}, w \Vdash B$،

۵. $\mathcal{M}, w \Vdash A \to B$ اگر و تنها اگر به ازای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، اگر $X \subseteq V(A)$ آنگاه $X \subseteq V(B)$.

نتیجه ۳.٤. $w \nVdash \neg A$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $X \in \mathcal{N}(w)$ به‌طوری‌که $X \subseteq V(A)$ و $X \neq \emptyset$.

لم ۳.۵. اگر $w \Vdash A$ آنگاه به ازای هر $X \in \mathcal{N}(w)$ داریم $X \subseteq V(A)$.

اثبات. با استقراء روی پیچیدگی A به سادگی اثبات میشود.

مثال ۳.۶. فرض کنید $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ مجموعه جهان‌ها باشد و تابع همسایگی مدل $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V\rangle$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که $\mathcal{N}(w_2) = \{\{w_2\}\}$ و $\mathcal{N}(w_1) = \{W, \{w_2\}\}$. با فرض $V(p) = \{w_2\}$، واضح است که $\mathcal{M}, w_1 \nVdash p \vee \neg p$.

مثال ۳.۷. فرض کنید $\mathcal{W} = \{w_0, w_1, w_2\}$ مجموعه جهان‌ها باشد و تابع همسایگی مدل $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V\rangle$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که $\mathcal{N}(w_0) = \left\{W,\ \{w_1\}, \{w_2\}\right\}$، $\mathcal{N}(w_1) = \{\{w_1\}\}$ و $\mathcal{N}(w_2) = \{\{w_2\}\}$. با فرض $V(p) = \{w_2\}$ و $V(q) = \{w_2\}$، می‌توان نتیجه گرفت که $\mathcal{M}, w_0 \nVdash \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$.

در ادامه نشان خواهیم داد که برای هر مدل کریپکی می‌توان یک مدل همسایگی دوم پیدا کرد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه باشند.

قضیه ۳.۸. برای هر مدل کریپکی $\langle \mathcal{W}, \leq, V\rangle$ یک مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V\rangle$ وجود دارد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

اثبات. مدل کریپکی $\mathcal{M}_k = \langle W, \leq, V\rangle$ را در نظر می‌گیریم و برای هر $w \in \mathcal{W}$، $\mathcal{N}(w)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(w) = \{u \in \mathcal{W} \mid w \leq u\}$$

$$\mathcal{N}(w) = \{X \mid X \subseteq R(w)\}.$$

ابتدا بایستی نشان دهیم که $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V\rangle$ یک مدل همسایگی دوم است. برای این منظور، طبق تعریف ۳.۲، بایستی نشان دهیم که برای هر $w \in \mathcal{W}$:

۱. وجود دارد $X \in \mathcal{N}(w)$ به طوری‌که $w \in X$،

۲. برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$ و $x \in X$، $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(w)$،

۳. اگر $w \in V(p)$، آنگاه برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، $X \subseteq V(p)$.

با توجه به انعکاسی بودن $\leq$ شرط ۱ به وضوح برقرار است.

برای نشان دادن برقراری شرط ۲، فرض کنید $X \in \mathcal{N}(w)$ و $x \in X$ آنگاه طبق تعریف $\mathcal{N}(w)$ داریم $w \leq x$ و در نتیجه $R(x) \subseteq R(w)$. حال فرض کنیم $Y \in \mathcal{N}(x)$،

آنگاه $Y \subseteq R(x)$ و در نتیجه $Y \subseteq R(w)$. لذا نتیجه می‌گیریم که $Y \in \mathcal{N}(w)$، یعنی $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(w)$.

برای نشان دادن برقراری شرط ۳، فرض کنیم $w \in V(p)$ و $X \in \mathcal{N}(w)$. اگر $X = \emptyset$، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت فرض کنیم $x \in X$ لذا طبق تعریف $\mathcal{N}(w)$، داریم $w \leq x$. در نتیجه بنابر تعریف مدل کریپکی برای منطق شهودی داریم $x \in V(p)$ یعنی $X \subseteq V(p)$.

حال نشان خواهیم کرد که $\mathcal{M}_k$ و $\mathcal{M}_\mathcal{N}$ هم‌ارز نقطه به نقطه هستند. اثبات با استقراء روی پیچیدگی فرمول‌ها انجام می‌شود. در مرحله‌ی استقراء، حالت شرطی $A \to B$ را بررسی می‌کنیم، اثبات بقیه موارد ساده هستند. فرض کنید $\mathcal{M}_k, w \Vdash A \to B$ بایستی نشان دهیم که $\mathcal{M}_\mathcal{N}, w \Vdash A \to B$. برای این منظور فرض کنیم $X \in \mathcal{N}(w)$ و $X \subseteq V(A)$ طبق تعریف $\mathcal{N}(w)$ برای هر $u \in X$ داریم $w \leq u$ و $\mathcal{M}_\mathcal{N}, u \Vdash A$. آنگاه طبق فرض و فرض استقراء، برای هر $u \in X$ داریم $\mathcal{M}_k, u \Vdash B$. دوباره طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که $X \subseteq V(B)$ و $\mathcal{M}_\mathcal{N}, w \Vdash A \to B$.

حال فرض کنید $\mathcal{M}_\mathcal{N}, w \Vdash A \to B$ بایستی نشان دهیم که $\mathcal{M}_k, w \Vdash A \to B$. فرض کنید $w \leq u$ و $\mathcal{M}_k, u \Vdash A$ آنگاه طبق تعریف $\mathcal{N}(w)$ داریم $\{u\} \in \mathcal{N}(w)$. حال از آنجایی که طبق فرض استقراء داریم $\{u\} \subseteq V(A)$، لذا $\{u\} \subseteq V(B)$. در نتیجه $\mathcal{M}_k, u \Vdash B$ یعنی $\mathcal{M}_k, w \Vdash A \to B$.

اگر همه فرمول‌های موجود در Γ در w درست باشند آنگاه می‌نویسیم $w \Vdash \Gamma$. همچنین می‌نویسیم $\Gamma \Vdash A$، اگر برای هر مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ و برای هر $w \in \mathcal{W}$ اگر $w \Vdash \Gamma$ آنگاه $w \Vdash A$.

قضیه ۳.۹. (درستی) $\Gamma \vdash A$ اگر و تنها اگر $\Gamma \Vdash A$.

اثبات. اثبات با استقراء روی پیچیدگی استنتاج است. فقط مورد $(E \to)$ را بررسی خواهیم کرد.

$(E \to)$ طبق فرض استقراء، برای هر $u \in \mathcal{W}$ اگر $u \Vdash \Gamma$ آنگاه $u \Vdash A$ و $u \Vdash A \to B$. فرض کنید $w \Vdash \Gamma$، در این صورت طبق فرض استقراء داریم $w \Vdash A$ و طبق لم ۳.۵، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، $X \subseteq V(A)$ دوباره از فرض استقراء می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، $X \subseteq V(B)$ در نهایت طبق تعریف ۳.۱، $w \Vdash B$.

لم ۳.۱۰. اگر $\Gamma \nvdash A$ آنگاه مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ و $w \in \mathcal{W}$ وجود درد به طوری که $w \Vdash \Gamma$ و $w \nVdash A$.

اثبات. اگر $\Gamma \nvdash A$ آنگاه طبق لم ۲.۲، مدل کریپکی شهودی $\langle \mathcal{W}, \leq, V \rangle$ و $w \in \mathcal{W}$ موجود است به طوری‌که $w \Vdash \Gamma$ و $w \nVdash A$. حال طبق قضیه‌ی ۳.۸، مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ و $w \in \mathcal{W}$ موجود است به طوری‌که $w \Vdash \Gamma$ و $w \nVdash A$.

حال به سادگی می‌توان نشان داد که IPC نسبت به معناشناسی همسایگی دوم تمامیت دارد.

قضیه ۳.۱۱. (تمامیت) $\Gamma \Vdash A$ اگر و تنها اگر $\Gamma \vdash A$.

اثبات. اگر $\Gamma \nvdash A$ آنگاه طبق لم ۳.۱۰، مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ و $w \in \mathcal{W}$ وجود درد به طوری که $w \Vdash \Gamma$ و $w \nVdash A$ در نتیجه، $\Gamma \nVdash A$.

قضیه ۳.۱۲. برای هر مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$، یک مدل کریپکی $\langle \mathcal{W}, \leq, V \rangle$ وجود دارد، به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, V \rangle$ یک مدل همسایگی دوم برای IPC باشد. رابطه‌ی $\leq$ را روی $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w \leq u \iff \exists X \in \mathcal{N}(w) \ s.t. \ u \in X$$

ابتدا نشان خواهیم داد که $\mathcal{M}_k = \langle W, \leq, V \rangle$ یک مدل کریپکی است. طبق تعریف مدل همسایگی دوم بدیهی است که $\leq$ انعکاسی است.

حال فرض کنیم $w \leq v$ و $v \leq z$. در این صورت وجود دارد $X_1 \in \mathcal{N}(w)$ به‌طوری‌که $v \in X_1$ و وجود دارد $X_2 \in \mathcal{N}(v)$ به‌طوری‌که $z \in X_2$. داریم $\mathcal{N}(v) \subseteq \mathcal{N}(w)$، لذا $X_2 \in \mathcal{N}(w)$ و $z \in X_2$ در نتیجه $w \leq z$ و رابطه $\leq$ تعدی است.

فرض کنید $\mathcal{M}_k, w \Vdash p$ و $w \leq v$، لذا برای هر $X \in \mathcal{N}(w)$، $X \subseteq V(p)$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض، وجود دارد $Y \in \mathcal{N}(w)$ به‌طوری‌که $v \in Y$. در نتیجه $\mathcal{M}_k, w \Vdash p$.

در نهایت با استقراء روی پیچیدگی فرمول‌ها می‌توان نشان داد که $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ و $\mathcal{M}_k$ هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

۱.۳ معناشناسی همسایگی دوم در مقایسه با معناشناسی توپولوژیکی

در این بخش رابطه‌ی بین معناشناسی همسایگی دوم و توپولوژیکی را بررسی کرده و نشان خواهیم داد که برای هر مدل مناسب روی فضای الکساندروف، یک مدل همسایگی دوم وجود دارد، به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند و همچنین برای هر مدل همسایگی دوم می‌توان یک مدل مناسب روی یک فضای الکساندروف خاص پیدا کرد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه باشند.

قضیه ۳.۱۳. برای هر فضای الکساندروف $\langle X,\ \Phi\rangle$ و $V: \mathbb{P} \longrightarrow \Phi$ مدل همسایگی دوم $\langle \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathrm{V}\rangle$ وجود دارد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

اثبات. فرض کنید $\langle X,\ \Phi\rangle$، فضای الکساندروف باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ $\mathcal{N}_\Phi(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_x = \bigcap\{Z \in \Phi \ \mid x \in \Phi\}$$

$$\mathcal{N}_\Phi(x) = \{Y \in \Phi \ \mid \ Y \subseteq \ U_x \ \}.$$

با این تعریف برای تابع همسایگی، می‌توان ثابت کرد که $\mathcal{N}_\Phi$ در شرایط تعریف ۳.۱، صدق میکند و در نتیجه $\langle X, \mathcal{N}_\Phi, V \rangle$ یک مدل همسایگی برای منطق شهودی است. در نهایت با استقراء روی پیچیدگی فرمول‌ها اثبات می‌شود که فضای الکساندروف $\langle X,\ \Phi\rangle$، با ارزشگذاری V و مدل همسایگی $\langle X, \mathcal{N}_\Phi, V \rangle$، هم‌ارز نقطه به نقطه هستند.

در ادامه عکس قضیه‌ی بالا را اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۳.۱٤. برای هر مدل همسایگی دوم $\langle \mathrm{X}, \mathcal{N}, \mathrm{V}\rangle$ فضای الکساندروف $\langle X,\ \Phi_{\mathcal{N}}\rangle$ با ارزشگذاری V وجود دارد وجود دارد به طوری که این دو مدل هم‌ارز نقطه به نقطه می‌باشند.

اثبات. برای اثبات کافی است $\Phi_{\mathcal{N}}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Phi_{\mathcal{N}} = \{U \in P(X) \ \mid \ \forall x \in U, \qquad \forall Y \in \mathcal{N}(x), \qquad Y \subseteq U\}.$$

٤. معناشناسی NB–همسایگی

برای معرفی معناشناسی NB–همسایگی و اثبات قضیه تمامیت برای IPC نسبت به این معناشناسی جدید، ابتدا نیاز داریم تا منطق زیرشهودی WF را معرفی و برخی تعاریف و قضایای مربوط به اثبات قصیه تمامیت برای این منطق را بیان کنیم.

۱.۴ منطق زیرشهودی WF

زبان منطق WF همان زبان منطق گزاره‌ای شهودی یعنی $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \top, \bot\}$ است.

تعریف ٤.١. (قاب NB–همسایگی) سه‌تایی $\mathbb{F} = \langle W, g, NB \rangle$ یک قاب NB–همسایگی منطق زیرشهودی نامیده می‌شود در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و NB یک تابع همسایگی از W به $P((P(W))^2)$ باشد (منظور از $P(W)$ مجموعه توانی W است) به‌طوری‌که:

۱. به ازای هر $w \in W$ و $X, Y \in P(W)$، اگر $X \subseteq Y$ **آنگاه** $(X, Y) \in NB(w)$،

۲. $NB(g) = \{(X, Y) \in (P(W)^2) | X \subseteq Y\}$.

جهان g را به دلیل خاصیت ۲ جهان شمول می‌نامیم.

تعریف ٤.٢. (مدل NB–همسایگی) مدل NB–همسایگی منطق زیر شهودی، چهارتایی $\mathbb{M} = \langle W, g, NB, V \rangle$ است که در آن $\langle W, g, NB \rangle$ یک قاب NB–همسایگی منطق زیرشهودی است و $V: \mathbb{p} \rightarrow 2^W$ تابع ارزشگذاری است.

تعریف ٤.٣. (درستی) فرض کنید $\mathbb{M} = \langle W, g, NB, V \rangle$ یک مدل NB–همسایگی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A در حالت $w \in W$ در مدل $\mathbb{M}$ به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathbb{M}, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $\mathbb{M}, w \nVdash \bot$،

۳. $\mathbb{M}, w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $\mathbb{M}, w \Vdash A$ و $\mathbb{M}, w \Vdash B$،

٤. $\mathbb{M}, w \Vdash A \vee B$ اگر و تنها اگر $\mathbb{M}, w \Vdash A$ یا $\mathbb{M}, w \Vdash B$،

۵. $\mathbb{M}, w \Vdash A \rightarrow B$ اگر و تنها اگر $(V(A), V(B)) \in NB(w)$.

تعریف ٤.٤. فرمول A در مدل $\mathbb{M} = \langle W, g, NB, V \rangle$ درست است، $\mathbb{M} \Vdash A$، اگر برای هر $w \in W$، $\mathbb{M}, w \Vdash A$ و اگر همه‌ی مدل‌ها A را فرس کنند، می‌نویسیم $\Vdash A$ و می‌گوییم A معتبر است.

تعریف ٤.٥. فرمول A روی قاب $\mathbb{F} = \langle W, g, NB \rangle$ معتبر است، $\mathbb{F} \Vdash A$، اگر به ازای هر مدل $\mathbb{M}$ روی $\mathbb{F}$، $\mathbb{M} \Vdash A$. می‌نویسیم $\mathbb{M} \Vdash \Gamma$، اگر برای هر $A \in \Gamma$، $\mathbb{M} \Vdash A$.

تعریف ٤.٦. WF منطق تعریف شده از اصل‌ها و قوانین زیر است:

۱. $A \rightarrow A \vee B$ ۸. $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$

۲. $B \to A \vee B$ ۹. $\frac{A}{B \to A}$

۳. $A \wedge B \to A$ ۱۰. $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$

٤. $A \wedge B \to B$ ۱۱. $\frac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$

٥. $A \to A$ ۱۲. $\frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$

٦. $\bot \to A$ ۱۳. $\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$

۷. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ١٤. $\frac{A \leftrightarrow B \quad C \leftrightarrow D}{(A \to C) \leftrightarrow (B \to D)}$

برای نشان دادن قضیه‌ی تمامیت برای منطق WF نیاز به تعاریف و لم‌هایی داریم که در ادامه به بیان آنها خواهیم پرداخت.

تعریف ٤.۷. مجموعه‌ای از جملات Δ، یک نظریه است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. اگر $A, B \in \Delta$ آنگاه $A \wedge B \in \Delta$،

۲. اگر $\vdash A \to B$ و $A \in \Delta$ آنگاه $B \in \Delta$،

۳. اگر $\vdash A$ آنگاه $A \in \Delta$.

تعریف ٤.۸. می‌نویسیم $\Gamma \vdash A$، هرگاه یک استنتاج برای A از Γ و قضایای WF با استفاده از قوانین $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$ و $\frac{A \quad A \to B}{B}$ وجود داشته باشد، با این شرط که $A \to B$ در WF اثبات پذیر باشد ($\vdash A \to B$).

می‌نویسیم $\Gamma \Vdash A$، هرگاه برای هر $\mathbb{M}$ و هر $w \in \mathbb{M}$، اگر $\mathbb{M}, w \Vdash \Gamma$ آنگاه $\mathbb{M}, w \Vdash A$.

گزاره ٤.۹. Δ یک نظریه است اگر و تنها اگر $\Delta \vdash A$ هم‌ارز $A \in \Delta$ باشد.

تعریف ٤.۱۰. مجموعه جملات Δ را اول گوییم، چنانکه اگر $A \vee B \in \Delta$، آنگاه $A \in \Delta$ یا $B \in \Delta$.

تعریف ٤.۱۱. فرض کنید W_{WF} مجموعه‌ی همه‌ی نظریه‌های اول و A یک فرمول باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\| A \|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| A \| = \{\Delta \mid \Delta \in W_{WF}, \qquad A \in \Delta \}.$$

تعریف ٤.۱۲. مدل $\mathbb{M}_{WF} = \langle W_{WF}, g, NB_{WF}, V \rangle$، را مدل کانونی برای WF نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. مجموعه‌ی قضایای WF را، جهان شمول g قرار می‌دهیم.

۲. به ازای هر $\Gamma \in W_{WF}$ و همه‌ی فرمول‌های A و B،
$NB_{WF}(\Gamma) = \{(\| A \|, \| B \|) \ \mid A \to B \in \Gamma\}$،

۳. **اگر** $p \in \mathbb{P}$، **آنگاه** $V(p) = \| p \| = \{ \Gamma \mid \Gamma \in W_{WF} \ , \ p \in \Gamma \}$.

با استفاده از مدل کانونی برای WF قضیه تمامیت برای WF اثبات می‌شود.

قضیه ٤.١٣. منطق WF نسبت به کلاس قاب‌های NB–همسایگی درست و تمام است.

تعریف ٤.١٤. برای هر قاب NB–همسایگی $\mathbb{F} = \langle \mathrm{W, g, NB} \rangle$، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ($X, Y, Z \in P(W)$)،

۱. $\mathbb{F}$ تحت اشتراک بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$، $(X, Z) \in NB(w)$ آنگاه $(X, Y \cap Z) \in NB(w)$.

۲. $\mathbb{F}$ تحت اجتماع بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$، $(Z, Y) \in NB(w)$ آنگاه $(X \cup Z, Y) \in NB(w)$.

۳. $\mathbb{F}$ در شرایط تعدی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$، $(Y, Z) \in NB(w)$ آنگاه $(X, Z) \in NB(w)$.

در ادامه اصول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\mathcal{C}) \quad (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$$

$$(\mathcal{D}) \quad (A \to B) \wedge (C \to B) \to (A \vee C \to B)$$

$$(\mathcal{I}) \quad (A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$$

لم ٤.١٥. (الف) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ تحت اشتراک بسته است.

(ب) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ تحت اجتماع بسته است.

(پ) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ در شرایط تعدی صدق می‌کند.

توجه داشته باشیم که اگر $\Gamma \subseteq \{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\}$ آنگاه $\mathrm{WF}\Gamma$ منطقی است که از اضافه کردن اصل Γ به منطق WF به دست آمده است.

قضیه ٤.١٦. اگر $\Gamma \subseteq \{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\}$ آنگاه $\mathrm{WF}\Gamma$ نسبت به کلاسی از قاب‌های NB–همسایگی با ویژگی‌های نسبت داده شده به اصول موجود در Γ درست و تمام است.

منطق زیرشهودی F توسط کرسی(Corsi Giovanna) در سال ۱۹۸۷ (کرسی [1]) معرفی شد، سپس رستال(Restall Greg) در سال ۱۹۹٤ (رستال [4]) دستگاه SJ را که مشابه

دستگاه F می‌باشد را معرفی کرد. دستگاه F توانایی اثبات فرمول‌هایی مانند $A \to (B \to A)$ را ندارد. F کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت جانشینی‌های WF، $\mathcal{C}$، $\mathcal{D}$ و $\mathcal{I}$ است. قضیه‌ی ٤.١٥، نشان می‌دهد که منطق F نسبت به معناشناسی NB–همسایگی که تحت اجتماع و اشتراک بسته است و در شرایط تعدی صدق می‌کند درستی و تمامیت دارد.

برای جزییات بیشتر راجع به منطق WF به مرجع (شیرمحمدزاده [5]) ارجاع شود.

۲.۴ NB–همسایگی برای IPC

تعریف ٤.١٧. برای هر قاب NB–همسایگی $\mathbb{F} = \langle W, g, NB\rangle$، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ($X, Y, Z \in P(W)$)،

۱. $\mathbb{F}$ در شرایط انعکاسی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ و $w \in X$ آنگاه $w \in Y$.

۲. $\mathbb{F}$ تحت حفظ بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $w \in X$ آنگاه برای هر Y، $(Y, X) \in NB(w)$.

۳. $\mathbb{F}$ تحت افزودن بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ آنگاه برای هر Z،

$$(\{v | (Y, Z) \in NB(v)\}, \{v | (X, Z) \in NB(v)\}) \in NB(w).$$

لم ٤.١٨. (الف) فرمول $p \wedge (p \to q) \to q$ کلاسی از قاب‌های $\mathbb{F} = \langle W, g, NB\rangle$ را که در شرط انعکاسی صدق می‌کنند را مشخص می‌کند.

(ب) فرمول $p \to (q \to p)$ کلاسی از قاب‌های $\mathbb{F} = \langle W, g, NB\rangle$ را که تحت حفظ بسته هستند را مشخص می‌کند.

(پ) فرمول $(p \to q) \to ((q \to c) \to (p \to c))$ کلاسی از قاب‌های $\mathbb{F} = \langle \mathrm{W, g, NB}\rangle$ را که تحت افزودن بسته هستند را مشخص می‌کند.

اثبات. فقط به اثبات قسمت (ب) می‌پردازیم، اثبات سایر موارد مشابه همین هستند.

(ب) فرض کنید $\mathbb{F}$ تحت حفظ بسته باشد و $\mathbb{M} = \langle W, g, NB, V\rangle$ مدلی دلخواه روی این قاب باشد. بایستی ثابت کنیم برای هر $w \in W$،

$$(V(p), V(q \to p)) \in NB(w).$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم که $V(p) \subseteq V(q \to p)$. فـرض کنیـد $w \in W$ و $\mathbb{M}, w \Vdash p$، آنگاه $w \in V(p)$. طبق فرض قاب تحت حفـظ بسـته اسـت، لـذا بـرای هـر Y داریم $(Y, V(p)) \in NB(w)$. در نتیجـه $(V(q), V(p)) \in NB(w)$، یعنـی $w \Vdash q \to p$. لـذا طبق تعریف قاب‌های NB–همسایگی برای هر $w \in W$، $(V(p), V(q \to p)) \in NB(w)$.

برای اثبات جهت دیگر از تناقض استفاده می‌کنیم. فرض کنید کلاس تحت حفـظ بسـته نباشد. آنگاه وجود دارد قاب $\mathbb{F}$ و جهانی مانند w در $\mathbb{F}$ به طوری‌کـه $w \in X$، $Y \in P(W)$ و $(Y, X) \notin N(w)$. تـابع ارزشـگذاری V روی قـاب $\mathbb{F}$ را طـوری در نظـر مـی‌گیـریم کـه $V(p) = X$ و $V(q) = Y$. در این صورت خواهیم داشت:

$$w \in V(p) \quad \Rightarrow \quad w \Vdash p$$

$$(V(p), V(q)) \notin NB(w) \quad \Rightarrow \quad w \nVdash p \to q$$

بنـــابراین $V(p) \nsubseteq V(q \to p)$. آنگـــاه طبـــق تعریـــف قـــاب‌هـــای NB–همســـایگی $g \nVdash p \wedge (p \to q) \to q$ و در نتیجه $\mathbb{F} \nVdash p \wedge (p \to q) \to q$.

در انتها اصول زیر را در نظر می‌گیریم:

$A \to (B \to A) \quad (\mathcal{H})$

$A \wedge (A \to B) \to B \quad (\mathcal{R})$

$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \quad (\mathcal{A})$

لم ۴.۱۹. (الف) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ تحت حفظ بسته است.

(ب) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ تحت افزودن بسته است.

(پ) اگر $\mathrm{WF}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$، آنگاه مدل کانونی منطق $\mathcal{L}$ در شرط انعکاسی صدق می‌کند.

اثبات. فقط به اثبات قسمت (الف) می‌پردازیم، اثبات سایر موارد مشابه همین هستند.

(الف) فرض کنید در مدل کانونی (تعریف ۴.۱۲) منطق $\mathcal{L}$ داشته باشیم $\Gamma \in \| A \|$. آنگـاه طبق تعریف ۴.۱۱، $A \in \Gamma$.

در نتیجه با استفاده از اصل $(\mathcal{H})$ برای هر B خواهیم داشت $B \to A \in \Gamma$. در این صورت نتیجه می‌گیریم که برای هـر $\| B \|$، $(\| B \|, \| A \|) \in NB(\Gamma)$. بنـابراین NB تحـت حفـظ بسته است.

قضیه ۴.۲۰. اگـر $\Gamma \subseteq \{\mathcal{H}, \mathcal{R}, \mathcal{A}\}$ آنگـاه $\mathrm{WF}\Gamma$ نسـبت بـه کلاسـی از قـاب‌هـای NB–همسایگی با ویژگی‌های نسبت داده شده به اصول موجود در Γ درست و تمام است.

اثبات. اثبات طبق لم ٤.١٩، بدیهی است.

طبق مقاله (رستال [4]) منطق شـهودی IPC کـوچکترین مجموعـه از فرمـول‌هـای بسـته تحت جانشینی‌های $\mathcal{A},\mathcal{H},SJ$ و $\mathcal{R}$ **است.**

نتیجه ٤.٢١. IPC نسبت به کلاسـی از قـاب‌هـای NB–همسـایگی کـه تحـت اشـتراک، اجتماع، حفظ و افزودن بسته هستند ودر

شرط انعکاسی و تعدی صدق می‌کنند درست و تمام هستند.

اثبات. اثبات طبق قضایای ٤.١٦ و ٤.٢٠ بدیهی است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا معناشناسـی‌هـای کریپکـی، توپولـوژیکی و همسـایگی اول بـرای منطـق شهودی (IPC) را که قبلا معرفی و قضایای درستی و تمامیت برای آنهـا اثبـات شـده بـود را بیان کردیم. سپس معناشناسی‌های جدیدی بـا عنـاوین معناشناسـی همسـایگی دوم و NB–همسایگی را برای منطق شهودی معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را نسبت بـه ایـن معناشناسی‌های جدید اثبات کردیم.

کتاب‌نامه

G. Corsi, Weak Logics with strict implication, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematic, 33:389-406, 1987.

B. Chellas, Modal logic: An Introduction, Cambridge University Press, 1980.

M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Neighborhood Semantics for Basic and Intuitionistic Logic, Logic and Logical Philosophy, pp 339-355, Volume 24, 2015.

G. Restall, Subintuitionistic Logics, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 35, Number 1, Winter 1994.

F. Shirmohammadzadeh Maleki, D. de Jongh, Weak Subintuitionistic Logics, Logic Journal of the IGPL, 25 (2), pp. 214-231, 2017.

D. Van Dalen, Logic and Structure, Fourth Edition, Springer, 2004.