

Applications of Logic to Analysis

Karim Khanaki*

Abstract

From the beginning of the emergence of new logic, fundamental links have been established between logic and various branches of mathematics, which led to solving mathematical problems and, conversely, solving basic problems in logic itself. One of the challenges of the logical methods in the study of mathematical structures is the impossibility of studying some of the important structures of mathematics, including analytic structures, in the framework of the first-order language and logic. The main purpose of this paper is to provide a suitable logic for studying these structures and then solving problems in the analysis using logical tools. At the beginning of this article, we will briefly review some suitable logics for studying the structures in mathematical analysis, and will outline some of the most important uses of logic in analysis. Then we present and prove one of the recent achievements, which is an important application of logic in analysis. In particular, we study the concept of definability in logic and its relation with mathematical analysis.

Keywords: Continuous logic; ultraproduct; definability; finitely representable; type space

* Faculty Member of Arak University of Technology and researcher at IPM Basic Sciences Research Institute, khanaki@ipm.ir

Date received: 2020/04/20, Date of acceptance: 2020/07/22

Copyright © 2010, IHCS (Institute for Humanities and Cultural Studies). This is an Open Access article. This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

کاربردهای منطق در آنالیز ریاضی

کریم خانکی*

چکیده

از ابتدای پیدایش منطق جدید، پیوندهای بنیادی بین منطق و شاخه‌های مختلف ریاضیات ایجاد شده است که منجر به حل مسائلی در ریاضیات و بلعکس حل مسائل بنیانی در خود منطق گردیده است. یکی از چالش‌های روش منطقی در مطالعه ساختارهای ریاضی عدم امکان مطالعه بعضی از ساختارهای مهم ریاضیات، از جمله ساختارهای موجود در آنالیز، در قالب زبان و منطق مرتبه اول می‌باشد. هدف اصلی این مقاله معرفی منطقی مناسب برای مطالعه این ساختارها و سپس حل مسائلی در آنالیز با استفاده از ابزارهای منطقی است. در ابتدای این مقاله مروری کوتاه بر منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای موجود در آنالیز ریاضی خواهیم داشت و برخی از مهمترین کاربردهای منطق در آنالیز را بیان خواهیم کرد. سپس یکی از دستاوردهای اخیر که کاربردی مهم از منطق در آنالیز میباشد را ارائه و اثبات می‌کنیم. به‌ویژه، مفهوم تعریف‌پذیری در منطق و پیوند آن با آنالیز ریاضی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: منطق پیوسته؛ فراضرب؛ تعریف‌پذیری؛ بطور متناهی ارائه‌پذیر؛ فضای تاپ

۱. مقدمه

منطق جدید پیوندهای اساسی با ریاضیات دارد. این پیوندها از کارهای فرگه، راسل، گودل و دیگران آغاز و تا کنون در حال افزایش است. نکته اساسی در این است که بیشترین پیوند منطق با جبر ریاضی است و ساختارهای جبری در قالب منطق بصورت گسترده‌ای مورد

* عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی اراک و پژوهشگر در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی IPM، khanaki@ipm.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۲۰/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۱

مطالعه قرار گرفته‌اند. سوالی که میتواند مطرح شود این است که "آیا منطق مرتبه اول با سایر شاخه‌های ریاضی (از جمله آنالیز ریاضی) پیوندی مشابه پیوند آن با جبر دارد؟" پاسخ اولیه به این سوال منفی است و میتوان بیان کرد که استفاده از روش‌های منطق ریاضی و نظریه مدل در همه‌ی بخش‌های ریاضی ممکن نبوده است و بعضی از شاخه‌های ریاضی از جمله آنالیز ریاضی در قالب منطق مرتبه اول کلاسیک قابل مطالعه نیستند. البته، این پاسخ نهایی نیست و در این مقاله با استفاده از منطقی مناسب (موسوم به منطق پیوسته) به مطالعه ساختارهای دیگر ریاضیات از جمله آنالیز خواهیم پرداخت. در واقع، یکی از اهداف این مقاله معرفی منطقی‌هایی مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی و همچنین بیان مزیت‌ها و کاربردهای این نوع مطالعه می‌باشد. همچنین، مروری کوتاه بر تاریخچه منطق‌های ارائه شده برای مطالعه ساختارهای آنالیزی و همچنین نتایج و دستاوردهای مهم آنها خواهیم داشت. در انتهای این مقاله به یکی از دستاوردهای مهم که اخیرا حاصل شده است اشاره خواهیم کرد و اثباتی از آن را ارائه خواهیم داد. (مراجعه شود به (Khanaki, 2018)).

برای روشن شدن اهمیت موضوع و دستاوردهایی که از مطالعه ساختارهای آنالیزی بوسیله ابزارهای منطق و نظریه مدل حاصل شده است، به برخی از مهمترین کاربردهای نظریه مدل در مطالعه ساختارهای آنالیزی اشاره می‌کنیم. بسیاری از مهمترین دستاوردها در فضاهای باناخ توسط مفاهیم و تکنیک‌های منطق اثبات شده است. از آن جمله میتوان به مثال سیرلسون (Tsirelson, 1974: 57-60) از یک فضای باناخ که شامل l_p و c_0 نیست اشاره کرد که از روش فورسینگ برای ساختن این مثال استفاده شده است که یک روش پایه‌ای در نظریه مجموعه‌ها می‌باشد؛ نمونه دیگر قضیه کریوین (Krivine, 1976: 1-29) است که توسط فراضرب‌ها و فشردگی اثبات شده است؛ قضیه کریوین-مائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) یکی دیگر از کاربردهای منطق در آنالیز می‌باشد که با استفاده از مفهوم پایداری در نظریه مدل، که یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم نظریه مدل است، بنا شده است؛ قضیه بورگاین-روزنتال-اسکتچمن (Bourgain, Rosenthal, and Schechtman, 1981: 193-228) که با استفاده از مفهومی از رتبه در نظریه مدل اثبات شده است؛ و در نهایت قضیه دوگان گاورز (Gowers, 1996: 1083-1093) با استفاده از بلوک قضیه رمزی اثبات شده است، که بیان می‌کند هر مجموعه رمزی تحلیلی است. این فهرست همچنان ادامه دارد و در این مقاله یکی دیگر از دستاوردهای نظریه مدل در آنالیز را که اخیرا اثبات شده است ارائه

خواهیم داد. همچنین به ارتباط بین نظریه مدل و آنالیز و ارتباط ذاتی آنها اشاره خواهیم کرد.

در ابتدا نگاهی به سیر استفاده از روش‌های منطق و نظریه مدل در مطالعه ساختارهای آنالیزی خواهیم داشت. از نخستین استفاده‌های ابزارهای منطق در آنالیز ریاضی و آنالیز تابعی، استفاده از مفهومی‌های فراضرب و فراتوان برای فضاهای باناخ است که اولین بار در ۱۹۶۵ توسط برتاگنوله-کاستله-کریوین (Bretagnolle, Dacunha-Castelle, and Krivine, 1965: 231-259) استفاده شدند. در این مقاله با استفاده از فراضرب‌ها ثابت شد که برای هر $1 \leq p \leq r \leq 2$ فضای $L_r[0,1]$ به صورت ایزومتریک در فضای $L_p[0,1]$ می‌نشیند. باید به این نکته توجه کرد که این قضیه در قلب مهمترین سوالات نظریه فضاهای باناخ قرار داشت و اثبات آن بوسیله فراضرب‌ها اولین اثبات از این قضیه بود. نکته دیگر که می‌بایست به آن توجه کرد این است که مفهوم فراضرب و فراتوان در فضاهای باناخ ترجمه مستقیمی از این مفاهیم در منطق کلاسیک نیست و تفاوت‌هایی در تعریف آنها وجود دارد. مقاله مذکور در فوق، اولین تعریف این مفاهیم برای ساختارهای آنالیزی می‌باشد. بعد از این تاریخ، استفاده از فراضرب‌ها در آنالیز رایج گردید و ریاضیدانانی چون هنسون، هینریش، موور، استرن، ریناود، و یوینو در مقاله‌های (Henson, 1976: 108-144)، (Heinrich, Henson, 1976: 79-90)، (and Moore, 1983: 79-90)، (Stern, 1976: 49-121)، (Raynaud, 1981: 671-673)، و (Iovino, 1997: 493-505) از این ابزار در جهت حل مسائل موجود در آنالیز ریاضی و همچنین بسط منطق‌هایی مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی استفاده کردند. می‌توان گفت که بنیان‌گذار منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی هنسون (Henson, 1976: 108-144) است که با ارائه منطق فرمول‌های کران‌دار مثبت گامی بزرگ در این راه برداشت. لازم به ذکر است که تقریباً یک دهه قبل از آن، چانگ و کیسلر (Chang and Keisler, 1966) کتابی با عنوان "نظریه مدل پیوسته" را نوشتند که طرحی کلی از منطق‌هایی برای مطالعه ساختارهای پیوسته (به ویژه ساختارهای آنالیزی) را ارائه می‌داد که حدوداً ۴۰ سال بعد مبنایی برای خلق "منطق مرتبه اول پیوسته" گردید که مناسب‌ترین منطق برای مطالعه ساختارهای متریک و فضاهای باناخ می‌باشد. (مراجعه شود به (Ben Yaacov, Berenstein, 2008: 315-427)). یکی از دلایلی که منطق ارائه شده توسط چانگ و کیسلر به مدت ۴۰ سال به فراموشی سپرده شده، کلیت ارائه شده در کتاب آنها و بنابراین عدم حصول نتایجی خوب از آن منطق‌ها بود. منطق هنسون (یا منطق فرمول‌های

کران‌دار مثبت) توسط خوزه یوینو (یکی از دانشجویان هنسون) و همچنین خود هنسون مورد مطالعه گسترده قرار گرفت و به عنوان بخشی از یک کتاب در این زمینه با عنوان "فراضب‌ها در آنالیز" به چاپ رسید (Henson and Jovino, 2002: 1-110). همچنین، یوینو این منطق را گسترش داد و مفاهیمی از قبیل فضاهای تایپ‌ها و پایداری را در این منطق مورد مطالعه قرار داد. البته مفهوم تایپ‌های بدون سور قبلا در کار کریوین و مائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) برای اثبات قضیه معروف آنها استفاده شد، اما معرفی و مطالعه این مفهوم در حالت کلی و بصورت روش‌مند اولین بار توسط یوینو (Iovino, 1997: 493-505) انجام گرفت. یوینو (Iovino, 1999: 77-95) توپولوژی‌های مختلف روی فضای تایپ‌ها تعریف و مفهوم تعریف‌پذیری در ساختارهای آنالیزی را بصورت روش‌مند ارائه و مورد مطالعه قرار داد. نتایجی مشابه دستاوردهای نظریه پایداری منطق کلاسیک در منطق فرمول‌های کران‌دار مثبت اثبات شدند و ساختارهای آنالیزی از جمله فضاهای باناخ با ابزارهای نظریه مدل‌ها مورد مطالعه و رده‌بندی قرار گرفتند. موج بعدی فعالیت در مطالعه ساختارهای آنالیزی بوسیله ابزارهای منطقی با ظهور ایتای بنیاکوف و الکس اوسویاتسوف (Ben Yaacov and Usvyatsov, 2010: 5213-5259) بوسیله‌ی اصلاح منطق‌های پیوسته چانگ و کیسلر ایجاد شد. آنها با حذف زواید منطق چانگ و کیسلر (Chang and Keisler, 1966) و به پیش بردن دستاوردهای نظریه پایداری برای این منطق اصلاح شده گامی اساسی در پیشرفت کار برداشتند. مفهوم پایداری برای فرمول‌ها (یعنی پایداری موضعی) که توسط ساهارون شلاح در منطق کلاسیک ارائه شده بود، بوسیله بنیاکوف و اوسویاتسوف برای منطق پیوسته ارائه گردید. البته قبل از آنها یوینو (Iovino, 1999: 77-95) نیز مفهوم پایداری را برای فرمول‌های بدون سور در منطق هنسون (Henson, 1976: 108-144) مورد مطالعه قرار داده بود، اما بطور ذاتی، منطق هنسون برای مفهوم "پایداری موضعی" مناسب نبود. از این پس، روند فعالیت‌ها در مطالعه ساختارهای آنالیزی بوسیله منطق پیوسته سرعت گرفت و نتایج بسیار مهمی چه از جهت گسترش منطق پیوسته و چه از جهت اثبات نتایج جدیدی برای آنالیز ریاضی حاصل شد. پیوندهای بسیار مهمی بین نظریه مدل و شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله آنالیز تابعی و نظریه اندازه، توپولوژی، سیستم‌های دینامیکی و نظریه یادگیری ایجاد شدند که قبلا قابل تصور نبودند. این پیوندها و تعامل بین منطق و نظریه مدل با دیگر شاخه‌های ریاضیات منجر به پیشرفت در جنبه‌های مختلف گردید، به این معنا که ابزارهای منطق منجر به نتایجی جدید در

زمینه‌های دیگر ریاضیات شدند و همچنین ابزارهای ریاضی منجر به گسترش ابزارهای منطق و فهم بهتری از خود منطق و نظریه مدل گردیدند. در فصل بعد یکی از نتایج جدید نظریه مدل در آنالیز را ارائه و اثبات می‌کنیم.

در انتهای این مقدمه، شایسته است که به یکی دیگر از منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی، موسوم به منطق انتگرال، که پیوندهای ذاتی با منطق پیوسته نیز دارد اشاره کنیم. برای مطالعه این منطق و کاربردهای آن به مقالات باقری-پورمه‌دیان (Bagheri and Pourmahdian, 2009: 465-492)، خانکی-باقری (Khanaki and Bagheri, 2011: 494-503)، خانکی-امینی (Khanaki and Amini, 2012: 294-302) و خانکی (Khanaki, 2016: 253-286) مراجعه شود.

۲. مقدمه‌ای بر منطق مرتبه اول پیوسته

در این فصل مفاهیم اساسی منطق مرتبه اول پیوسته (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427) که در فصل بعد استفاده خواهد شد را ارائه می‌دهیم.

تعریف: یک زبان L برای منطق مرتبه اول پیوسته شامل یک مجموعه F از نمادهای تابعی، یک مجموعه R از نمادهای محمولی و یک مجموعه C از نمادهای ثابت می‌باشد. به هر نماد تابعی f از مجموعه F یک تابع $\delta_f: (0,1] \rightarrow (0,1]$ به نام پیمان پیوستگی یکنواخت اختصاص داده می‌شود. بطور مشابه، برای هر نماد محمولی P از مجموعه R یک پیمان پیوستگی یکنواخت δ_P و همچنین یک بازه بسته و کراندار I_P از اعداد حقیقی اختصاص می‌یابد.

در تعریف فوق همیشه یک نماد مشخص d در مجموعه R وجود دارد. همچنین می‌توان این نماد را به عنوان نماد تساوی در مجموعه نمادهای منطقی در نظر گرفت. خواهیم دید که اگر d بصورت متریک گسسته (یعنی $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$) تعبیر شود آنگاه نقش نماد تساوی در منطق کلاسیک را خواهد داشت.

تعریف: یک L -ساختار مرتبه اول M عبارت است از یک ساختار متریک کامل (M, d) بطوریکه:

۱. برای هر نماد تابعی f از مجموعه F ، یک تابع پیوسته یکنواخت $f: M^n \rightarrow M$ وجود دارد بطوریکه اگر $d(x, y) < \delta_f(\varepsilon)$ آنگاه $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

۲. برای هر نماد تابعی P از مجموعه R ، یک تابع پیوسته یکنواخت $P: M^n \rightarrow I_p$ وجود دارد بطوریکه اگر $d(x, y) < \delta_P(\varepsilon)$ آنگاه $|P(x) - P(y)| < \varepsilon$.

۳. برای هر نماد ثابت c از مجموعه C ، یک عضو $c^M \in M$ وجود دارد.

در ادامه چند ساختار آشنای آنالیزی را به عنوان مثال‌هایی از ساختار متریک بیان می‌کنیم. (برای توضیحات و مثال‌های بیشتر مراجعه شود به (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427 و مراجع ذکر شده در آن).

مثال‌ها: الف) هر فضای باناخ یک ساختار متریک است. زبان مناسب برای فضاهای باناخ در ادامه این مقاله توضیح داده خواهد شد.

ب) هر شبکه باناخ (Banach lattice) یک ساختار متریک است در زبانی مناسب. به عنوان حالتی خاص، فضاهای L^p ، به عنوان شبکه‌های باناخ، مثال‌هایی از ساختارهای متریک هستند.

پ) هر جبر باناخ (Banach algebra) یک ساختار متریک است.

ت) هر C^* -جبر (C^* -algebra) یک ساختار متریک است.

ث) فضاهای هیلبرت با ضرب داخلی مثالی از ساختارهای متریک هستند.

فرمول‌ها مشابه منطق کلاسیک با استقراء تعریف می‌شوند، هرچند تفاوت‌ها و نکات ظریفی در تعریف آنها وجود دارد که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم.

۱.۲ ترم‌هایی از زبان L

ترم‌ها با استقراء دقیقاً مشابه منطق مرتبه اول تعریف می‌شوند. هر متغیر و هر نماد ثابت یک L -ترم است. اگر f یک نماد تابعی n -تایی باشد و t_1, \dots, t_n همگی L -ترم باشند، آنگاه $f(t_1, \dots, t_n)$ نیز یک L -ترم است. همه L -ترم‌ها با این روش ساخته می‌شوند.

۲.۲ فرمول‌های اتمی از زبان L

فرمول‌های اتمی از L بصورت $P(t_1, \dots, t_n)$ هستند که در آن P یک محمول n -تایی از L است و t_1, \dots, t_n همگی L -ترم هستند. بطور ویژه، $d(t_1, t_2)$ یک L -ترم است که در آن t_1, t_2 L -ترم هستند.

۳.۲ فرمول‌ها از زبان L

فرمول‌ها نیز با استقراء بوسیله فرمول‌های اتمی ساخته می‌شوند و ساختار استقراء مشابه تعریف متناظر آن در منطق مرتبه اول کلاسیک است. توابع پیوسته نقش رابط‌های منطقی را بازی می‌کنند و sup و inf نقش سورها را ایفا می‌کنند.

تعریف: کلاس L -فرمول‌ها عبارت است از کوچکترین کلاسی که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. فرمول‌های اتمی L -فرمول هستند.

۲. اگر $h: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ تابعی پیوسته باشد و $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ L -فرمول باشند، آنگاه $h(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ یک L -فرمول است.

۳. اگر φ یک L -فرمول و x یک متغیر باشد، آنگاه $inf_x \varphi$ و $sup_x \varphi$ نیز L -فرمول هستند.

یک L -فرمول را بدون سور گوئیم اگر هیچ نماد sup و inf در آن استفاده نشود. یک L -فرمول که متناظر با هر متغیر در آن یک سور وجود داشته باشد را یک L -جمله گوئیم.

۴.۲ حکم‌ها از زبان L

یک L -حکم E عبارتی است بصورت $\varphi = 0$ ، که در آن φ یک L -فرمول است. L -حکم E را بسته گوئیم اگر φ یک L -جمله باشد.

محدودیت‌های اعمال شده از جمله پیوستگی یکنواخت، پیمانانه پیوستگی یکنواخت، و کراندار بودن محمولات و توابع، منجر به ایجاد یک نظریه مدل خوب برای ساختارهای آنالیزی می‌شود که نتایجی مشابه با نظریه مدل کلاسیک برای این منطق قابل اثبات است. در ادامه بعضی از مفاهیم و نتایج این نظریه مدل را ارائه می‌دهیم.

۳. نظریه مدل

از این پس زبان L را ثابت در نظر می‌گیریم. در ادامه مفاهیم و قضایای نظریه مدل را معرفی می‌کنیم.

تعریف: یک تئوری در زبان L عبارت است از یک مجموعه از L -حکم‌های بسته. اگر T یک تئوری در زبان L و M یک L -ساختار باشد، M را یک مدل از T گوئیم اگر هر حکم

$E \in T$ در M درست باشد. تئوری M ، که با $Th(M)$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه حکم‌های درست در M می‌باشد. یک تئوری که تئوری یک مدل باشد را کامل می‌گوییم.

تعریف: فرض کنید M و N دو L -ساختار باشند.

۱. M و N را هم‌ارز مقدماتی گوئیم هرگاه $Th(M) = Th(N)$. به عبارت دیگر

مجموعه‌های همه حکم‌هایی که در هر دو ساختار درست هستند یکسان می‌باشند.

۲. اگر $M \subseteq N$ ، آنگاه گوئیم M زیرساخت مقدماتی N است (یا N توسیع مقدماتی M

است) هرگاه برای هر L -فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و عناصر a_1, \dots, a_n از M ، داشته باشیم

$$\varphi^M(a_1, \dots, a_n) = \varphi^N(a_1, \dots, a_n).$$

۳. یک تابع F از یک زیرمجموعه M به N را یک نشاندن مقدماتی گوئیم اگر برای هر

L -فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و عناصر a_1, \dots, a_n از M ،

$$\varphi^M(a_1, \dots, a_n) = \varphi^N(F(a_1), \dots, F(a_n)).$$

مفهوم نشاندن مقدماتی یکی از مهمترین مفاهیم مورد استفاده در این مقاله است. در

واقع، هنگامی که می‌گوییم یک فضای باناخ X بطور ایزومتریک در یک فضای باناخ Y

نشانده می‌شود، منظور نشاندن مقدماتی می‌باشد.

یکی از مهمترین ابزارهای نظریه مدل، همانطور که در مقدمه به آن اشاره شد، مفهوم

فراضرب می‌باشد. تعریفی مناسب برای فراضرب در منطق پیوسته در مقاله (Ben Yaacov,

Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427) ارائه شده است و نتایج مشابه

نظریه مدل کلاسیک برای این منطق حاصل شده‌اند. ازجمله نتایج مهمی که بوسیله

فراضربها ثابت شده‌اند عبارت است از قضیه واش و نتیجه آن یعنی قضیه فشردگی که در

ادامه به آن اشاره می‌شود:

قضیه فشردگی: فرض کنید T یک L -تئوری و C یک کلاس از L -ساختارها باشد. اگر

برای هر زیرمجموعه متناهی از T یک ساختار در C وجود داشته باشد که مدلی برای آن

مجموعه متناهی باشد، آنگاه یک فراضرب از ساختارهای موجود در C وجود دارد که مدلی

از T است.

یکی دیگر از قضایا مهم نظریه مدل که در منطق پیوسته نیز قابل اثبات است عبارت

است از:

قضیه لوونهایم-اسکولم (Lowenheim-Skolem): فرض کنید که κ یک کاردینال نامتناهی

باشد که بزرگتر یا مساوی کاردینال زبان می‌باشد. فرض کنید M یک L -ساختار و $A \subseteq M$

مجموعه‌ای باشد که زیرمجموعه چگالی از کاردینال κ دارد. آنگاه یک زیرساخت N از M وجود دارد بطوریکه:

۱. N زیرساخت مقدماتی M است؛

۲. $A \subseteq N \subseteq M$ ؛

۳. N یک زیرمجموعه چگال از کاردینال κ دارد.

۱.۳ فضای تایپ‌ها

یکی از مهمترین مفاهیم نظریه مدل مفهوم "تایپ" می‌باشد. از آنجایی که فرمول‌ها دارای تعدادی متناهی نماد هستند، بیان بسیاری از مفاهیم ریاضیات در منطق کلاسیک (و همچنین منطق پیوسته) با استفاده از فقط یک فرمول میسر نمی‌باشد. یک تایپ مجموعه‌ای از حکم‌هاست و می‌تواند خواص بیشتری از عناصر را بیان کرد. در ادامه تعریف دقیق یک تایپ را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید M یک مدل از تئوری T باشد و $A \subseteq M$. $L(A)$ را زبانی شامل L و همه نمادهای c_a برای هر $a \in A$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت $L(A)$ -ساختار $(M, a)_{a \in A}$ را با نماد M_A نمایش می‌دهیم و T_A را برای $L(A)$ -تئوری M_A در نظر می‌گیریم، یعنی مجموعه $L(A)$ -حکم‌های بسته که در M_A درست هستند. (توجه داریم که هر مدل از T_A یکرخت با ساختاری بصورت $(N, a)_{a \in A}$ است که N مدلی از T است.)

تعریف: فرض کنید T_A مشابه فوق تعریف شده باشد و x_1, \dots, x_n متغیرهایی متمایز باشند. یک مجموعه p از $L(A)$ -حکم‌ها با متغیرهای آزاد x_1, \dots, x_n را یک n -تایپ روی A گوئیم اگر یک مدل $(N, a)_{a \in A}$ از T_A و عناصر b_1, \dots, b_n از N موجود باشند بطوریکه p مجموعه همه $L(A)$ -حکم‌هایی مانند $E(x_1, \dots, x_n)$ باشد که $E(b_1, \dots, b_n)$ در $(N, a)_{a \in A}$ درست است.

در اینصورت p را با $tp^M(b_1, \dots, b_n/A)$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم (b_1, \dots, b_n) تایپ p را در N محقق می‌کند.

مجموعه تمام n -تایپ‌های روی A با $S_n(T_A)$ (یا بصورت ساده‌تر با $S_n(A)$) نشان داده می‌شود و به آن فضای تایپ‌ها گفته می‌شود. (برای مطالعه بیشتر در مورد فضای تایپ‌ها، مراجعه شود به (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427).)

۴. بیان مساله و نتایج اصلی

یکی از مهمترین زمینه‌های مطالعه در همه‌ی شاخه‌های ریاضیات، رده‌بندی و مطالعه ویژگی‌های مطلوب ساختارهای ریاضی است. این مطالعه منجر به دسته‌بندی ساختارها بر مبنای ویژگی‌های "خوب" در آن حوزه ریاضیات و در نهایت منجر به درک بهتر و حل مسائل موجود در آن شاخه خواهد شد. در آنالیز ریاضی و بویژه نظریه فضاهای باناخ یکی از سوالات اساسی از ابتدای پیدایش این حوزه از ریاضیات، وجود فضاهای کلاسیک در یک فضای باناخ دلخواه بوده است. منظور از فضاهای کلاسیک، فضاهای c_0 و l_p (برای $1 \leq p < \infty$) می‌باشد. اهمیت وجود فضاهای کلاسیک در یک فضای باناخ از این منظر قابل توضیح است که میتوان آن فضای باناخ را به قطعه‌های کوچکتری (یعنی، فضاهای کلاسیک) تقسیم کرد به نحوی که مطالعه این قطعه‌ها ساده‌تر است و اطلاعاتی در مورد فضای باناخ مورد مطالعه ارائه می‌دهد. برای چندین دهه تمام مثال‌های کشف شده شامل این فضاهای کلاسیک بودند و تصور غالب براین بود که همه فضاهای باناخ شامل این فضاها هستند، اما در دهه ۱۹۷۰ سیرلسون (Tsirelson, 1974: 57-60) اولین مثال از فضایی که شامل هیچ‌کدام از فضاهای c_0 و l_p نبود را کشف کرد. از آن پس، شناسایی و رده‌بندی فضاهایی که شامل فضاهای کلاسیک هستند از مرکزی‌ترین سوالات این حوزه از ریاضیات بوده است. در این فصل، ارتباط ذاتی بین این سوال و مفهوم تعریف‌پذیری در منطق ریاضی را مطالعه می‌کنیم و یکی از دستاوردهای اخیر را که کاربرد از منطق در این حوزه است را بیان و اثبات می‌کنیم. (مراجعه شود به (Khanaki, 2018)).

در این فصل ساختارهای فضاهای باناخ را مطالعه می‌کنیم، بنابراین منظور از زبان در اینجا زبان ساختارهای باناخ است که در ادامه بطور دقیق آنرا تعریف می‌کنیم. زبان فضاهای باناخ عبارت است از $L_B = \{0, c_{r,s}, \|\cdot\|\}$ که r, s مقادیر خود را از اعداد حقیقی اخذ می‌کنند که $|r| + |s| \leq 1$. در اینجا، 0 یک نماد ثابت است؛ $c_{r,s}$ یک نماد تابعی ۲-تایی است که $c_{r,s}(x, y)$ به صورت $rx + sy$ تعبیر می‌شود؛ $\|\cdot\|$ یک محمول ۱-تایی است؛ و همه تابع‌ها و محمول‌ها پیوسته یکنواخت هستند با پیمانانه پیوستگی یکنواخت $\delta: (0,1] \rightarrow (0,1]$ که $\delta(r) = r$. (به عبارت دیگر توابع و محمولات ۱-پیشیتز هستند.) یادآوری می‌کنیم که یک فضای باناخ جدایی‌پذیر است اگر شامل زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

تعریف: فرض کنید X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد. گوییم X در منطق پیوسته تعریف‌پذیر است، اگر X یکتا مدل جدایی‌پذیر از تئوری $Th(X)$ باشد. یعنی اگر Y مدل جدایی‌پذیر دیگری از $Th(X)$ باشد، آنگاه X و Y (بطور ایزومتریکی) یکریخت هستند. به عبارت دیگر، X بطور یکتا توسط تئوری خودش مشخص می‌شود.

توجه داریم که یک تئوری دلخواه می‌تواند تعداد زیادی مدل از هر کاردینال دلخواه داشته باشد. (اگر جدایی‌پذیر بودن مفهوم متناظر با شمارا بودن در منطق کلاسیک در نظر گرفته شود، تعریف فوق از منظر نظریه مدل کلاسیک معادل با مفهوم \aleph_0 -سازم بودن می‌باشد.)

قبل از ارائه تعریف زیر، یادآوری می‌کنیم که نگاشت $f: Y \rightarrow X$ بین دو فضای برداری Y, X یک نشان دادن خطی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو بردار v, w در X و هر اسکالر r

$$f(r \cdot v + w) = r \cdot f(v) + f(w).$$

تعریف: فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. گوییم Y در X بطور متناهی ارائه‌پذیر است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرفضای با بعد متناهی E از Y ، یک نشان دادن خطی $f: E \rightarrow X$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $(1 - \varepsilon)\|x\| \leq \|f(x)\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|$.

تعریف فوق بطور شهودی بیان می‌کند که هر زیرفضای با بعد متناهی E از Y تقریباً بطور ایزومتریکی در X وجود دارد، یا می‌توان زیرفضاهایی در X یافت که به هر اندازه دلخواه شبیه زیرفضای E باشند.

یادآوری: مفهوم بطور متناهی ارائه‌پذیر بودن در منطق پیوسته قابل بیان است. یعنی می‌توان با حکم‌های موجود در منطق پیوسته آن را توصیف کرد. برای این منظور، فرض کنید Y یک فضای باناخ و E یک زیرفضای دلخواه با بعد متناهی از Y باشد. آنگاه همه حکم‌هایی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم: برای هر $\varepsilon > 0$ و اسکالرها r_1, \dots, r_n

$$(1 - \varepsilon)\|\sum_1^n r_i a_i\| \leq \|\sum_1^n r_i x_i\| \leq (1 + \varepsilon)\|\sum_1^n r_i a_i\|.$$

(در اینجا $\{a_1, \dots, a_n\}$ یک پایه برای زیرفضای E است و r_i ها اعداد حقیقی هستند. توجه داریم که $\|\sum_1^n r_i a_i\|$ یک عدد حقیقی است.)

اکنون یکی از قضایای مهم نظریه فضاهای باناخ را که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد بیان می‌کنیم.

قضیه دورتزیکی (مراجعه شود به (Figiel: 1974, 1-5)): برای هر $0 < \varepsilon$ و هر عدد صحیح k یک عدد صحیح $n = n(\varepsilon, k)$ وجود دارد بطوری که هر فضای باناخ X با بعد بزرگتر از n شامل یک زیرفضای E با بعد k است که برای هر $a \in E$ ، $\|a\| \leq |a| \leq (1 + \varepsilon)\|a\|$. (در اینجا $| \cdot |$ نرم اقلیدسی است، یعنی $\frac{1}{2}(\sum_1^n |r_i a_i|^2) = (\sum_1^n |r_i|^2 \|a_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$ که r_i اسکالرهایی از اعداد حقیقی هستند و a_i ها عناصری از E هستند).

تذکر: قضیه دورتزیکی بیان می کند که برای هر فضای باناخ X ، فضای هیلبرت l_2 در X بطور متناهی ارائه پذیر است. (توجه داریم که نامساوی های $\|x\| \leq |x| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|$ و $(1 - \varepsilon)|x| \leq \|x\|$ ، به دلیل اینکه ε دلخواه است، قابل تبدیل به یکدیگر هستند). اکنون، فرض کنید $\{e_1, e_2, \dots\}$ پایه استاندارد l_2 باشد. برای هر $0 < \varepsilon$ ، هر n و اسکالرهایی r_1, \dots, r_n حکم های زیر را در نظر می گیریم: $\frac{1}{2}(\sum_1^n |r_i|^2) \leq (1 - \varepsilon)$ $\frac{1}{2}(\sum_1^n |r_i|^2) \leq (1 + \varepsilon)$. طبق قضیه دورتزیکی این حکم ها در هر فضای باناخ محقق می شوند، و این مطلب چیزی نیست جز اینکه l_2 یک تایپ است برای تئوری یک (یا هر) فضای باناخ. (توجه داریم که تایپ مورد نظر یک ω -تایپ است، یعنی تعداد متغیرهای آزاد آن نامتناهی و شمارا است).

اکنون آماده هستیم که ارتباط بین تعریف پذیری و وجود ساختاری خوب را بیان کنیم. قضیه: فرض کنید X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد. اگر X در منطق پیوسته تعریف پذیر باشد، آنگاه X (بطور ایزومتریکی) شامل l_2 است.

برهان: اولاً با استفاده از قضیه دورتزیکی، حکم هایی که فضای l_2 را توصیف می کنند، یک تایپ در تئوری $Th(X)$ هستند. (برای روشن شدن این مطلب توجه داریم که طبق این قضیه، هر تعداد متناهی از این حکم ها در هر فضای باناخ محقق می شوند، بنابراین همه این حکم ها تشکیل یک تایپ می دهند. به تذکر فوق مراجعه کنید). بنابراین با استفاده از قضیه لوونهایم-اسکولم، یک مدل جدایی پذیر Y از $Th(X)$ وجود دارد که (بطور ایزومتریکی) شامل l_2 است. اکنون با توجه به اینکه X تعریف پذیر است و بنابراین یکتا مدل جدایی پذیر از $Th(X)$ می باشد، X و Y می بایست یکرخت باشند، و در نتیجه X شامل l_2 است.

لازم به ذکر است که اثبات مشابهی، بطور مستقل، توسط هنسون (Ward Henson) به نویسندگان این مقاله پیشنهاد شد. اگرچه، در مقاله (Khanaki: 2018) نتایجی بسیار قویتر از آنچه در اینجا بیان شده اند ارائه شده اند.

۵. نتیجه‌گیری

قضیه فوق شرطی کافی برای وجود فضاهای باناخ کلاسیک ارائه می‌دهد. به عنوان مثال، از قضیه فوق نتیجه می‌شود که فضای سیرلسون در منطق پیوسته تعریف‌پذیر نیست زیرا شامل فضاهای کلاسیک نمی‌باشد. دستاوردهای این مقاله منجر به کشف بخشی از رابطه ذاتی بین دو حوزه مختلف (یعنی منطق ریاضی و نظریه فضاهای باناخ) شدند و نوید این مطلب را می‌دهند که مطالعه ساختارهای مختلف ریاضیات (بطور ویژه آنالیز ریاضی) با ابزارهای منطقی منجر به درک بهتر مسائل و در نهایت حل آنها خواهند شد. در واقع، استفاده از ابزارهای موجود در یک حوزه منجر به دستاوردهایی در حوزه دیگر و برعکس می‌شوند.

برای تکمیل بحث، تناظر بین برخی از مفاهیم موجود در این دو حوزه (یعنی منطق ریاضی و نظریه فضاهای باناخ) را بیان می‌کنیم. مفهوم دنباله‌های تمایز ناپذیر (indiscernible sequences) در نظریه مدل متناظر با مفهوم دنباله‌های ۱-زیرمتقارن (1-subsymmetric sequences) در نظریه فضاهای باناخ است که در کار کریوین (Krivine, 1976: 1-29) برای اثبات قضیه معروفش استفاده شده است. مفهوم رتبه‌های اردینالی (ordinal ranks) در نظریه مدل متناظر با اندیس‌های اردینالی (ordinal indices) در آنالیز است. مدل‌های اهرنفتخت-مستوفسکی (Ehrenfeucht-Mostowski models) متناظر با مدل‌های گسترش یافته (spreading models) در فضاهای باناخ هستند. همچنین مفاهیم تایپ بدون سور (quantifier-free type)، پایداری (stability) و فراضرب (ultraproduct) در هر دو حوزه متناظر یکدیگر هستند و بطور گسترده در کاربردها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. (برای مشاهده تعریف تایپ بدون سور و پایداری در نظریه فضاهای باناخ به (Khanaki, 2018) مراجعه شود).

در انتهای این مقاله می‌بایست به این مطلب اشاره کنیم که مشاهدات ذکر شده و دیگر نتایج این مطلب را نوید می‌دهند که ارتباط بین این دو حوزه (یعنی منطق و آنالیز) بسیار عمیق‌تر از پیوندهایی است که تا کنون کشف شده‌اند. بنابراین، یافتن پیوندهای بیشتر بین این دو حوزه و استفاده از ابزارها و روش‌های موجود از یک حوزه در حوزه‌ای دیگر بسیار مطلوب بنظر میرسد و این پروژه می‌تواند نتایج بسیار شگفت‌انگیزی در آینده داشته باشد.

کتابنامه

- Bagheri S.M., and Pourmahdian M. (2009), The logic of integration, Arch. Math. Logic.48, 465-492.
- Ben Yaacov I., Berenstein A., Henson C.W., and Usvyatsov A. (2008), Model theory for metric structures, Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 350, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 315–427.
- Ben Yaacov I. and Usvyatsov A. (2010). Continuous first order logic and local stability. Trans. Amer. Math. Soc., 362(10):5213-5259.
- Bourgain J., Rosenthal H. P., and Schechtman G. (1981). An ordinal L_p -index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L_p . Ann. of Math. (2), 114(2):193-228.
- Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D., and Krivine J.-L. (1965/1966), Lois stables et espaces L^p , Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) 2, 231–259.
- Chang C.C. and Keisler H. J. (1966). Continuous model theory. Annals of Mathematics Studies, No. 58. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- Figiel T. (1974), A short proof of Dvoretzky's theorem, Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique), exp. no23, p. 1-5
- Gowers W. T. (1996) . A new dichotomy for Banach spaces. Geom. Funct. Anal., 6(6):1083-1093.
- Heinrich S., Henson C. W., and Moore L. C. (1983), Elementary equivalence of L_1 -preduals. In Banach space theory and its applications (Bucharest, 1981), pages 79-90. Springer, Berlin.
- Henson C. W. (1976), Nonstandard hulls of Banach spaces. Israel J. Math., 25(1-2):108-144, 1976.
- Henson C. W. and Iovino J. (2002), Ultraproducts in analysis, Analysis and logic (C. Ward Henson, Jose Iovino, Alexander S. Kechris, and Edward Odell, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 262, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Lectures from the mini-courses offered at the International Conference held at the University of Mons-Hainaut, Mons, August 25–29, 1997, Edited by Catherine Finet and Christian Michaux, pp. 1-110.
- Iovino J. (1997), Definability in functional analysis. J. Symbolic Logic, 62(2):493-505.
- J. Iovino J. (1999). Stable Banach spaces and Banach space structures. I. Fundamentals. In Models, algebras, and proofs (Bogota, 1995), pages 77-95. Dekker, New York.
- Khanaki K. (2018), \aleph_0 -categorical Banach spaces contain l_p or c_0 , on Arxiv <https://arxiv.org/abs/1603.08134>, to appear.
- Khanaki K. (2016), Amenability, extreme amenability, model-theoretic stability, and NIP in integral logic, Fundamenta Mathematicae 234, 253-286.
- Khanaki K., and Amini M. (2012), Haar measure and integral logic, Math. Log. Quart.58, No. 4-5, 294-302.
- Khanaki K., and Bagheri S.M. (2011), Random variables and integral logic, Math. Log. Quart.57, No. 5, 494-503.

- Krivine, J.-L. (1976), Sous-espaces de dimensionnie des espaces de Banach reticules. Ann. of Math., 104:1-29.
- Krivine, J.-L., and Maurey B. (1981), Espaces de Banach stables. Israel J. Math., 39(4):273-295.
- Raynaud Y. (1981), Espaces de Banach superstables, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 292(14):671-673.
- Stern J. (1976), Some applications of model theory in Banach space theory. Ann. Math. Logic, 9(1-2):49-121.
- Tsirel'son, B. S. (1974), It is impossible to imbed l_p or c_0 into an arbitrary Banach space, Funkcional. Anal. i Prilozen., 8(2): 57-60.