Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 12, No. 2, Autumn and Winter 2021-2022, 235-250
Doi: 10.30465/lsj.2022.38229.1375

Logic, measures and unbounded integration logic

Alireza Mofidi*

Abstract

Interactions between logic, measure and probability theories have always possessed significant importance in logic and model-theory. In this regard, numerous logical frameworks were introduced to connect these subjects. Integration-logic is amongst important ones of them that was first introduced by Keisler and Hoover and then developed in various works such as Bagheri-Pourmahdian paper and turned into a suitable logical framework for working with structures equipped with measures and integration operator. Also in a paper by Mofidi-Bagheri, a more abstract framework for working with operators more general than integration was introduced. Moreover, in a more recent work on connections of logic and measures, different aspects of dynamical-systems and measures in model-theory was published by Mofidi in 2018. One of the characteristics of Bagher-Pourmahdian framework is its boundedness, i.e. it is assumed that interpretation of every relation is a bounded function. Despite some advantages of this assumption (such as simplifying working with relations and proving ultraproduct and compactness theorems), it causes substantial limitations in the expressive-power of logic and its ability to interact with various mathematical structures. In this paper, we aim to resolve this limitations by strengthening and generalizing the framework of integration-logic in a way that relations be interpreted with (not-necessarily bounded) functions in L^p-spaces and furthermore, showing that fundamental results of ultraproduct and compactness theorems still hold (of course with new proofs and more subtle techniques). This generalization can provide more

* Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), mofidi@aut.ac.ir

Date received: 20/07/2021, Date of acceptance: 14/10/2021

interactions with structures such as L^p-spaces and (not-necessarily-bounded) random-variables which are central notions in analysis and statistics.

Keywords: Unbounded integration logic; ultraproduct theorem; compactness theorem; L^p-spaces.

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال ۱۲، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱٤۰۰، ۲۳۷ - ۲۵۰

منطق، اندازه و رویکردی غیرکراندار به منطق انتگرال

علیرضا مفیدی*

چکیده

تعامل منطق با نظریه‌های اندازه و احتمال همواره از رویکردهای مهم مطالعات در علم منطق و نظریه مدلها بوده است. در این راستا بسترهای منطقی متعددی برای تلفیق این شاخه‌ها بوجود آمده‌اند. منطق انتگرال نمونه‌ای مهم از آنهاست که در ابتدا توسط کیسلر و هوور معرفی و بررسی گردید و سپس در مقالات مختلف از جمله مقاله باقری-پورمهدیان مطالعه‌اش تکمیلتر و تبدیل به بستری منطقی مناسب کار با ساختارهایی که انتگرال‌گیری روی اندازه‌ها در آنها حائز اهمیت‌اند شد. همچنین توسط مفیدی-باقری بستری کلی‌تر برای کار با اپراتورهای گسترده‌تر از صرفا انتگرال به عنوان سور فراهم گردید. ضمنا در کاری موخرتر در ارتباط اندازه و منطق، در سال ۲۰۱۸ جنبه‌های مختلفی از رویکردهای سیستم‌های دینامیکی به اندازه‌ها در نظریه مدل توسط مفیدی به چاپ رسید. یکی از ویژگی‌های بستر منطقی باقری-پورمهدیان کرانداری آن است بدین معنا که همواره فرض می‌شود تعبیر روابط منطقی همگی توابعی کراندارانـد. این ویژگی در کنار مزایایی از قبیل راحت‌شدن کار با روابط و اثبات قضایای فراضرب و فشردگی، محدودیتهای مهمی را در قدرت‌بیان، اصل‌بندی ساختارها و تعامل با ساختارهای متنوع ریاضیاتی ایجاد می‌کند. در این مقاله قصد داریم این محدودیت را رفع کرده، ورژنی تعمیم‌یافته و تقویت‌شده از قالب منطق انتگرال معرفی کنیم که تعبیر روابط بتوانند توابعی (نه-لزوما-کراندار) در فضاهای L^p

* عضو هیئت علمی، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)، mofidi@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱٤۰۰/۰٤/۲۹، تاریخ پذیرش: ۱٤۰۰/۰۷/۲۲

باشند و نیز قضایای بنیادی فراضرب و فشردگی نیز با فرمی قویتر (و البته اثبات‌هایی با تکنیک‌های جدید) برقرار باشند. با این تعمیم امکان تعامل بیشتر با فضاهای L^p و نیز متغیرهای تصادفی نه-لزوما-کراندار (در احتمال) که بخشهای مهمی از آنالیز و احتمالات هستند فراهم می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: منطق انتگرال بیکران، قضیه فراضرب، قضیه فشردگی، فضاهای L^p.

۱. مقدمه

ارتباط و تعامل منطق با نظریه های اندازه و احتمال همواره از رویکردهای مهم مطالعاتی در علم منطق بوده است. بخصوص در نظریه مدلها از گذشته تاکنون به این موضوع بسیار پرداخته شده است و قالب ها و بسترهای منطقی مهمی برای تلفیق منطق، نظریه اندازه ها و احتمال بوجود آمده‌اند. منطق انتگرال یکی از این بسترهای مهم می باشد. این منطق در ابتدا توسط کیسلر و هوور در مقالات (Keisler, 1985) و (Hoover, 1978) معرفی و مطالعه شد و سپس توسط کیسلر و فاخادرو در (Fajardo, Keisler, 2002) برای مطالعه فرآیندهای تصادفی مورد استفاده قرار گرفت. سپس توسط باقری-پورمهدیان در مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009) مطالعه آن تکمیلتر شد و تبدیل به بستری منطقی مناسبی برای کار با ساختارهای ریاضی که مجهز به اندازه بودند و انتگرالگیری روی آنها دارای اهمیت بود گردید. هم‌چنین نویسنده این مقاله و باقری در مقاله (Mofidi-Bagheri, 2011) قالب منطقی مجردتری برای کار با اپراتورهای کلی‌تر از انتگرال به عنوان سور معرفی نمودند. ضمنا نویسنده این مقاله در دو مقاله قبلی خود [Mofidi-2018] و [Mofidi-2020] جنبه های اندازه ای-دینامیکی و ترکیبیاتی برخی ساختارهای مرتبط با نظریه مدل را مورد مطالعه قرار داده است. به‌خصوص در مقاله [Mofidi-2018] جنبه های مختلفی از رویکردهای دینامیکی به اندازه ها در نظریه مدل بررسی و به چاپ رسیده بود. خالی از لطف نیست که اشاره شود لیست افرادی که در حیطه‌های مرتبط با منطق انتگرال و کاربردهایش کار کرده اند علاوه بر کیسلر و هوور که مبدعان آن بودند شامل افراد متعددی از قبیل راسکویچ، دوردویچ، فاخاردو، مارکویچ، ایکودینویچ، باقری، پورمهدیان، مفیدی، خانکی، صفری و ... می باشد.

یکی از ویژگیهای قالب منطـق انتگـرال در مقـالات قبـل مـثلا در مقالـه بـاقری-پورمهدیان کراندار بودن آن است به این معنا که از ابتدا در تعریف ساختارها فرض مـی گردد که تعبیر روابط منطقی همگی باید توابعی کراندار باشند. ایـن ویژگـی مزایـایی از قبیل راحت شدن کار با روابط و راحت شدن اثبـات قضـایای فراضـرب و فشـردگی داشته است. از سویی دیگر این فرض کرانـدار بـودن محـدودیتهای مهمـی را در ایـن منطق چه از نظر قدرت بیان و اصل‌بندی کردن ساختارها و تئوری ها و چـه تعامـل بـا ساختارهای متنوع ریاضیاتی مجهز به توابع بیکران ایجاد می کند. در واقع در ریاضـیات بخصوص نظریه اندازه و احتمال، در بسیاری از مواقع با تـوابعی غیـر کرانـدار مواجـه هستیم که بطور طبیعی ظاهر می شوند (مثلا در فضاهای L^p و یا متغیرهای تصادفی غیـر کراندار). در این مقاله قصد داریم این محدودیت را تا حد زیـادی رفـع کنـیم و قالـب منطق انتگرال را تعمیم داده و تقویت نماییم و ورژنی گسترش یافته از آن معرفـی کنـیم به گونه ای که بتواند روابط بیکران را نیز دربرگرفته و با آن‌ها کار کند و مشخصـا تعبیـر روابط بتوانند توابعی نه لزوما کراندار در فضاهای L^p باشند. بطور دقیقتر این قالب را بـه گونه ای تقویت می کنیم بطوریکه بتواند توابعی که در فضاهای L^p $(p > 1)$ هسـتند را نیز به عنوان روابط در بر بگیرد. این قالب منطقی گسترش‌یافته را منطق انتگـرال بیکـران می نامیم. بنابراین با این گسترش قالب منطـق انتگـرال، بسـیاری از بخشـهای ریاضـی امکان ورود و تعامل با این منطق را می یابند. در واقع با این تعمیم امکان تعامـل بیشـتر و کار کردن با فضاهای L^p و نیز متیرهای تصادفی (نه لزوما کراندار) در احتمـال کـه از نظر ریاضیات بسیار مهم هستند و بخشهای مهمی از آنالیز و احتمال و ریاضیات پیوسـته را شامل می شوند بالا می‌رود. مـثلا بطـور مشـخص فضـاهای احتمـال بـا متغیرهـای تصادفی نه لزوما کراندار بطور کامل به عنوان مثالهایی از مفهوم ساختار در ایـن قالـب منطقی جدید قرار می گیرند.

از سوی دیگر پس از این تعمیم، نشان دادن اینکه خواص اصـلی منطـق هـم‌چنـان برقرار می‌ماند نیازمند تلاشی مضاعف مـی باشـد چـرا کـه وجـود توابـع بیکـران در ساختارها به‌راحتی می تواند اثبات فرمهای کلاسیک قضیه فراضرب و فشـردگی را بـه هم بزنند. بنابراین نیاز است که با تحلیلی عمیقتر نشان دهیم که چگونه می توان همزمـان

با اضافه کردن امکان کار با توابع بیکران همچنان این قضایا را اثبات نمود. از این رو در این مقاله اثبات‌های جدیدتری برای این قضایا ارائه می کنیم که نسبت به اثباتهای کلاسیک مفصلتر هستند. درواقع اثبات‌های ما نیاز بـه تکنیکهای جدیـدی دارد کـه در اثباتهای گذشته که فقط با توابع کراندار کار می کردند وجود نداشت. ایـن تکنیکها را در فصلهای پیش رو (فصلهای ۳ و٤) بیان خواهیم نمود و سپس قضیه بنیادی فراضرب را ثابت خواهیم کرد که پس از آن قضیه فشردگی بصورت روتین از آن نتیجـه خواهـد شد.

۲. تعاریف و پیش‌نیازها

در ذیل به بیان برخی مقدمات و تعاریف مورد نیاز در مقاله می پردازیم.

تعریف ۱: دریک فضای انـدازه $(X, \mathcal{B}, \mu)$ و تـابع انـدازه پـذیر $f: X \to \mathbb{R}$ و عـدد حقیقی $\cdot < p < \infty$، منظور از p–نرم f مقدار زیر است:

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

همچنین اگر $p = \infty$، آنگاه p –نرم بصورت زیر تعریف می شود:

$$\| f \|_\infty = inf\ \{a \geq 0: \mu(\{x: |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

فضای همه توابع اندازه پذیر روی X با p–نرم (∞–نرم) متنـاهی بـا $L^p(X)$ ($L^\infty(X)$) نشان داده می شود.

لم زیر در اثبات گزاره های مقاله مورد نیاز خواهد بود:

لـم ۲ (از کتـاب (Folland, 1999): اگـر $\mu(X) < \infty$ و $0 < r < s \leq \infty$، آنگـاه $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ و نیز

$$\| f \|_r \leqslant \| f \|_s . \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}.$$

توجه: در این مقاله هرگاه از کلمه بیکران برای یک تابع استفاده مـی گـردد منظـور "نه لزوما کراندار" می باشد. تابعی حقیقـی–مقـدار مثـل $f: X \to \mathbb{R}$ را کرانـدار گـوئیم

هرگاه عدد حقیقی ای مانند $c \in \mathbb{R}$ به گونه ای موجود باشد که برای هـر $x \in X$ داشـته باشیم $|f(x)| \leq c$.

توجه: وقتی در کار با یک فضای اندازه از عبارت "تقریبا برای هر نقطـه" در مـورد آن فضا استفاده می شود منظور این است که "برای هر نقطه به جز نقاط زیـر مجموعـه ای از اندازه صفر".

۳. معرفی منطق انتگرال بیکران (زبان، فرمول‌ها و ساختارها)

در این فصل به عنوان یکی اهداف اصلی مقاله، به معرفی "منطق انتگـرال بیکـران" کـه گسترش و تقویت ای از منطق انتگرال کلاسیک خواهد بود می پردازیم و بـا ایـن کـار زمینه‌ای را برای تعامل روابط نه لزوما کراندار ساختارهای ریاضیاتی با منطـق از طریـق منطق انتگرال فراهم می آوریم. در ذیل شروع به معرفی ساختار نحوی (زبان و فرمولهـا) و معنایی (ساختارها) این منطق گسترش یافته می نماییم.

فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی مرتبه اول شامل نمادهای ثابت و رابطـه ای و تـابعی بـا تعـداد مواضع دل‌خواه باشد. همواره فرض می کنیم که $\mathcal{L}$ دارای یـک نمـاد رابطـه ای متمـایز برای تساوی مثل e برمی باشـد. همچنـین بـه هـر نمـاد رابطـه ای R یـک سـه تـایی $(\mathrm{p_R}, b_\mathrm{R}, \mathrm{c_R})$ از اعداد حقیقی نامنفی نظیر می شود که به $\mathrm{p_R}$ سطح، به b_Rکران، و بـه $\mathrm{c_R}$ سوپریمم-نرم R گوییم در حالی که $\mathrm{p}_R > 1$ و نیز $\mathrm{b_R}$ و $\mathrm{c_R}$ نا منفی هسـتند و همچنـین p_R و $\mathrm{c_R}$ می توانند ∞ هم باشند. این پارامترها کـه جدیـد بـوده و متنـاظری در منطـق انتگرال کلاسیک ندارند عناصر فنی مهمی هستند که در اثباتهـای قضـایا کمـک کننـده خواهند بود.

در این منطق مجموعه اعداد حقیقی فضای ارزش اسـت. عطـف هـا مشـابه منطـق انتگرال کلاسیک شامل $+$ ، $\wedge$ و $\vee$ (یعنی ماکزیمم و مینیمم) و نیز قدر مطلق $|\ |$ و نیـز r

برای هر عدد حقیقی می باشند. همچنین عمل · ضرب بین هر دو فرمول که حداقل یکیشان دارای سوپریمم–نرم متناهی باشد به عنوان عطف تعریف می شود. نماد $\int$ نیز همانند گذشته به عنوان سور استفاده می گردد. همچنین لیست نامتناهی $x, y, z, \dots$ از متغیرها داریم. تعبیر هر نماد رابطه‌ای روی ساختار M تابعی مثل $\xi : \mathrm{M^n} \to \mathbb{R}$ می باشد.

تعریف ۳: مجموعه فرمولها در یک زبان مثل $\mathcal{L}$ بصورت استقرایی بصورت زیر تعریف می‌شود (ترم های زبان مثل حالت معمول تعریف می شوند):

۱. اگر Rیک نماد رابطه ای n–موضعی باشد و $x_1, \dots, x_n$ نمادهای متغیری باشند در این‌صورت $R(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول اتمی با سطح p_R، کران b_R، و سوپریمم–نرم c_R است. همچنین اگر $c_R < \infty$ و نیز $t_1, \dots, t_n$ ترم باشند، در اینصورت $R(t_1, \dots, t_n)$ یک فرمول اتمی با سطح p_R و کران و سوپریمم–نرم c_R می باشد. بطور خاص رابطه تساوی $e(x, y)$ یک فرمول اتمی است.

۲. هر عدد حقیقی r یک فرمول با $c_r = |r|$ و $b_r = |r|$ و $p_r = \infty$ می باشد.

۳. فرض کنید ϕ و ψ فرمولهایی باشند و r عددی حقیقی. در آنصورت $\xi = \phi + \psi$ نیز فرمولی با سطح تعریف شده با $\mathrm{p}_\xi = \min\{\mathrm{p}_\phi, \mathrm{p}_\psi\}$ و کران $b_\xi = b_\phi + b_\psi$ و نیز سوپریمم–نرم $c_\xi = c_\phi + c_\psi$ می باشد. همچنین $r\phi$ نیز فرمولی با سطح p_ϕ و کران $|r|b_\phi$ و سوپریمم–نرم rc_ϕ می باشد.

٤. اگر ϕ و ψ فرمولهایی باشند، آنگاه $\phi \wedge \psi$ و $\phi \vee \psi$ نیز فرمولهایی با سطح $\min\{p_\phi, p_\psi\}$، کران $b_\phi + b_\psi$ و سوپریمم–نرم $max\{c_\phi, c_\psi\}$ هستند.

۵. اگر ϕ و ψ فرمولهایی باشند بطوریکه $c_\phi, c_\psi < \infty$ آنگاه $\phi.\psi$ فرمولی با سطح $\min\{\mathrm{p}_\phi, \mathrm{p}_\psi\}$ و کران $b_\phi . b_\psi$ و سوپریمم–نرم $c_\phi . c_\psi$ است.

٦. اگر ϕ فرمول باشند آنگاه $\int \phi(x, y) dy$ نیز یک فرمول با سطح p_ϕ، کران b_ϕ و سوپریمم–نرم c_ϕ است.

در زیر تعریف ساختارها در قالب منطقی‌مان را ارائه می دهیم که تفاوتش با تعریف کلاسیک مقاله(Bagheri-Pourmahdian, 2009) در آیتمهای ۱ و ٤ است که اجازه می دهد تعبیر روابط بیکران نیز باشند و پارامترهای جدید $\mathrm{p_R}$، b_Rو $\mathrm{c_R}$ را وارد می کند.

تعریف ٤: در یک زبان $\mathcal{L}$ منظور از یک $\mathcal{L}$–ساختار بیکران ساختاری بصورت $(M, \mathcal{B}^n, \mu_n)_{n\in\omega}$ است که عبارات زیر برقرار باشند (لازم به ذکر است که در نمادگذاری بالا منظور از $\mathcal{B}^n$ و μ_n ها سیگما جبرها و اندازه‌هایی روی توانهای M^n ها می باشد):

۱. M یک ساختار مرتبه اول است با این نکته که تعبیر هر نماد رابطه ای n–موضعی مثل Rتابعی به صورت $R^M: M^n \to \mathbb{R}$ است که $\sup |R^M| \leq c_R$ (ضمنا یادآوری می کنیم که c_R می توانند ∞ هم باشد).

۲. برای هر n طبیعی، $(M^n, \mathcal{B}^n, \mu_n)$ یک فضای اندازه است و $\mu_1(M) \leq 1.$

۳. تعبیر هر ترم $t(\bar{x})$ ای یک تابع اندازه پذیر $t^M: M^n \to M$ است.

٤. برای هر مجموعه ترم $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$، تابع $\bar{x} \mapsto (t_1^M(\bar{x}), \dots, t_k^M(\bar{x}))$ اندازه‌پذیر است. همچنین تعبیر هر نماد رابطه ای R اندازه پذیر است و نیز $||R^M||_{p_R} \leq b_R$.

۵. برای هر m,n ای μ_{m+n} گسترشی از اندازه ضربی $\mu_m \times \mu_n$ است.

٦. هر μ_n ای نسبت به جابجایی متغیرها پایدار است.

۷. خاصیت فوبینی برقرار است به این معنا که اگر B یک مجموعه اندازه پذیر به نسبت اندازه $\mu_m \times \mu_n$ باشد آنگاه برای هر $\bar{a} \in M^m$ مجموعه $B_{\bar{a}} = \{\bar{b} \in M^n | (\bar{a}, \bar{b}) \in B\}$ مجموعه ای μ_n–اندازه پذیر است. همچنین تابع $\bar{x} \mapsto \mu_n(B_{\bar{x}})$ تابعی μ_m–اندازه پذیر است. همچنین $\int \mu_n(B_{\bar{x}}) d\mu_m = \mu_{m+n}(B)$ برقرار است.

تعبیر فرمولها در ساختارها به شیوه طبیعی و به صورت استقرایی انجام می شود. برای مثال اگر M یک $\mathcal{L}$–ساختار و $\phi(\bar{x})$، $\theta(\bar{x})$ و $\psi(\bar{x}, y)$ فرمول باشند و $\bar{a} \in M$، در اینصورت ارزش $(\phi + \theta)(\bar{a})$ و $(\int \psi(\bar{x}, y) dy)(\bar{a})$ در M که با $(\phi + \theta)^M(\bar{a})$ و $(\int \psi(\bar{x}, y) dy)^M(\bar{a})$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\phi + \theta)^M(\bar{a}) = \phi^M(\bar{a}) + \theta^M(\bar{a}),$$
$$(\int \psi(\bar{x}, y) dy)^M(\bar{a}) = \int \psi^M(\bar{a}, y) dy.$$

مشاهده زیر برقرار است و تایید درستی آن خیلی مشکل نمی باشد:

مشاهده ۵: تعبیر هر فرمول در هر $\mathcal{L}$-ساختاری مثل M یک تابع اندازه پذیر است. هم‌چنین برای هر فرمول $\phi(\bar{x},\bar{y})$داریم

$$\int_{M^m}(\int_{M^n} \phi^M(\bar{x},\bar{y})d\bar{x})\, d\bar{y} = \int_{M^{n+m}} \phi^M(\bar{x},\bar{y})d(\bar{x}\bar{y}).$$

به علاوه، برای هر پارامتر $\bar{a} \in M^m$، فرمول با پارامتر $\phi(\bar{x},\bar{a})$ ای نیز اندازه پذیر است. هم‌چنین برای هر فرمول $\phi(\bar{x})$داریم:

$$\phi^M(\bar{x}) \in L^{p_\phi}(M^n),$$
$$||\phi^M||_{p_\phi} \leqslant b_\phi,$$
$$sup\,|\phi^M| \leqslant c_\phi\ .$$

مثال: یک فضای احتمال دلخواه و مجموعه ای از متغیرهای تصادفی (نه لزوما کراندار) روی آن که توابعی در L^p های($p > 1$) آن فضا باشند را در نظر بگیرید. این فضایی بسیار رایج و مهم در ریاضیات و نظریه احتمال می باشد. به راحتی می توان مشاهده نمود که این فضا در واقع یک مثال و نمونه از مفهوم $\mathcal{L}$-ساختارهای منطقی (در منطق انتگرال بیکران) معرفی شده در این مقاله می باشد. در واقع کافیست متناظر با هر متغیر تصادفی یک نماد رابطه ای در زبان $\mathcal{L}$ قرار دهیم. در اینصورت به راحتی از فضای ما یک $\mathcal{L}$-ساختار به‌طور طبیعی استخراج خواهد شد.

۴. قضیه‌های بنیادی فراضرب و فشردگی در منطق انتگرال (ورژن بیکران)

در فصل قبل منطق انتگرال بیکران به صورت تعمیم و تقویتی از منطق انتگرال کلاسیک معرفی گردید که اجازه می داد تعبیر نمادهای رابطه‌ای توابعی بیکران باشند. همانگونه که در مقدمه نیز اشاره شد وجود توابع بیکران در ساختارها به راحتی می توانند اثبات فرم‌های کلاسیک قضیه فراضرب و فشردگی را به هم بزنند. فراضرب یک خانواده از $\mathcal{L}$-ساختارهای بیکران مشابه آنچه که در منطق انتگرال کلاسیک (مثلا در مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009)) انجام شده است انجام می گیرد و ما آن را در چند پاراگراف زیر یادآوری می کنیم. ولی نکته مهم و کلیدی این است که اثبات قضیه بنیادی فراضرب موجود در مقاله مذکور و سایر مقالات کلاسیک، برای رویکرد بیکران

و تعمیم یافته ما دیگر کار نمی کنند. چرا که در آن مقالات فرض بسیار اساسی کراندار بودن روابط از ابتدا مفروض است و با برداشتن آن فرض، تکنیکهای موجود در اثباتها به هم می خورد. هدف این فصل این است که نشان دهد که با تحلیلی عمیقتر می توان همزمان با اضافه کردن امکان کار با توابع بیکران هم‌چنان این قضایا را اثبات نمود. در واقع با توجه به تعمیم روابط و امکان بیکران بودن، ما نیازمند به ارائه اثباتی مفصل‌تر و کلیتر نسبت به اثباتهای کلاسیک هستیم که این در واقع نتیجه‌ای است که در این مقاله و در "قضیه فراضرب ورژن بیکران" در زیر در ادامه این فصل بدست می آید و یکی از اهداف اصلی این مقاله می باشد. همچنین نیازمند به تکنیک‌های جدیدی هستیم که قبلا وجود نداشته است. در نهایت با کمک این تکنیک‌ها قضیه بنیادی فراضرب را ثابت خواهیم کرد. پس از آن قضیه فشردگی بصورت روتین از قضیه بنیادی فراضرب نتیجه خواهد شد. همانطور که قبلا هم ذکر شد تعمیم و تقویت به حیطه بیکران باعث می شود بخشهای بسیار بیشتری از ریاضیات بخصوص فضاهای L^p و متغیرهای تصادفی نه لزوما کراندار، بیشتر در تعامل با بستر منطقی تعمیم یافته ما قرار بگیرند.

ابتدا تعریف کلاسیک فراضرب ساختارهای اندازه ای را مرور مختصری می کنیم. فرض کنید $M_i = (M_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ (برای $i \in I$) یک خانواده اندیسدار از $\mathcal{L}$–ساختارهایی بیکران و نیز $\mathcal{D}$ یک فرافیلتر روی I باشد (بطور دقیقتر، هر یک از توانهای هر M_i ای هم مجهز به سیگما–جبری مثل $\mathcal{B}_i^n$ ای و اندازه ای مثل μ_i^n است که مشابه آنچه در تعریف $\mathcal{L}$–ساخت آمد به یکدیگر مربوط‌اند. ما فقط با توان اول کار می کنیم و بقیه مشابه است). مجموعه $N = \prod_{\mathcal{D}} M_i$ را فراضرب مجموعه‌ای معمولی در نظر بگیرید. یادآوری می کنیم که عناصر M کلاسهای رابطه هم ارزی ~ روی $\prod_i M_i$ هستند که اینطور تعریف می شود که $(x_i) \sim (y_i)$ اگر و تنها اگر $\{i | x_i = y_i\} \in \mathcal{D}$. فرض کنید $[a_i]$ کلاس هم ارزی عنصر (a_i) در ضرب باشد. روی N ساختاری به صورت زیر تعریف می کنیم:

- برای هر نماد ثابت c در زبان قرار می دهیم $c^N = [c^{M_i}]$.
- برای هر نماد تابعی F در زبان تعریف می کنیم:

$F^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = [F^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)].$

- برای هر نماد رابطه ای R در زبان تعریف می کنیم:

$R^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = lim_{\mathcal{D}}([R^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]).$

تا اینجا ساختارهای رابطه ای و تابعی و ثوابت روی N تعریف شدند. حال یک اندازه روی N تعریف می کنیم. اگر برای هر i ای $A_i \subseteq M_i$ مجموعه های اندازه پذیر باشند، آن‌گاه

$[A_i] = \{[a_i] | \quad \{i | a_i \in A_i\} \in \mathcal{D}\} \subseteq N$

را یک مجموعه اندازه پذیر روی N تلقی می کنیم (و لازم به ذکر است که اینها تشکیل جبر بول می دهند) و اندازه اختصاص داده شده به آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\rho_n([A_i]) = \lim_{\mathcal{D}}([\mu_{in}(A_i)]).$

حال ρ_n با قضیه کاراتئودوری قابل گسترش به اندازه ای منحصر به فرد روی سیگما جبر $\mathcal{A}$ روی N (تولید شده توسط اندازه پذیرهای پایه ای) می شود که آن را با μ (یا μ_1) نشان می دهیم. بنابراین تاکنون فضای اندازه $(N, \mathcal{A}, \mu)$ را ساخته ایم و N را به اندازه مناسب هم مجهز کردیم. مشابها در مورد توانهای N^n نیز روی سیگما جبر $\mathcal{A}^n$ روی N^n می توانیم اندازه های مربوطه را بسازیم و آن را با μ_n نشان دهیم و با اینکار فضای اندازه $(N^n, \mathcal{A}^n, \mu_n)$ را ساخته‌ایم. حال می توان به راحتی مشاهده نمود که اگر برای هر $i \in I$ ای $f_i: M_i \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر و کراندار باشد آنگاه تساوی زیر برقرار است:

$\int_N lim_{\mathcal{D}}(f_i) = lim_{\mathcal{D}}(\int_{M_i} f_i).$

همچنین برای هر $\alpha > 0$، مجموعه $\{\bar{x}: |R(\bar{x})| > \alpha\}$ در هر M_i ای دارای اندازه $(\frac{b_R}{\alpha})^{p_R}$ است. ضمنا خیلی سخت نیست مشاهده شود که $N = (N, \mathcal{A}^n, \mu_n)$ خود یک $\mathcal{L}$-ساختار بیکران است.

گزاره ۶ (گزاره کلیدی): فرض کنید $\beta > 0, p > 1$ و برای هر $i \in I$ ای $(M_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ یک فضای اندازه باشد بگونه ای که $\mu_i(M_i) \leq q$ و نیز $f_i: M_i \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر باشد. فرض کنید $(N, \mathcal{B}, \nu)$ فراضرب این ساختارها باشد. همچنین فرض کنید $lim_{\mathcal{D}}\left(||f_i||_p\right) \leqslant \beta$. در اینصورت داریم:

$$\int_N lim_{\mathcal{D}}\, f_i d\nu = lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i .$$

اثبات: تابع $lim_{\mathcal{D}}\, f_i$ را با f نشان می دهیم. با استفاده از لم ۲ و با توجه به اینکه طبق تعریف $\mathcal{L}$-ساختارها، برای هر i ای $\mu_i(M_i) \leq 1$، خواهیم داشت $||f_i||_1 \leqslant ||f_i||_p$. بنابراین $lim_{\mathcal{D}}(||f_i||_1) \leqslant \beta$. توجه شود که $| lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i | \leqslant lim_{\mathcal{D}}\, ||f_i||_1 \leqslant \beta$.
ابتدا گزاره را برای f و f_i های $(i \in I)$ نامنفی نشان می دهیم و سپس برای f و f_i های دلخواه این‌طور قرار می دهیم $f = f^+ - f^-$ که $f^+(x) = \max(f(x),0)$ و $f^-(x) = \max(-f(x),0)$. حال داریم $f^+ = lim_{\mathcal{D}}\, f_i^+$ و $f^- = lim_{\mathcal{D}}\, f_i^-$. چون هر دوی f^+ و f^- نامنفی هستند داریم:

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i^+ - lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i^- = lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i.$$

بنابراین فرض کنیم که f و f_i ها نامنفی اند. نشان خواهیم داد که $\int_N f d\nu \geqslant lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i$. فرض خلف کنید که $t_1 = \int_N f d\nu < lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i = t_2$. قرار دهید $\delta = \frac{t_2 - t_1}{8}$ و نیز برای هر n طبیعی تعریف کنید $A_{i,n} := \{x \in M_i : f_i(x) > n\}$ و $B_{i,n} := A_{i,n}^c$.

مشاهده A: برای هر n داریم $\left\{i \in I : \int_{B_{i,n}} f_i d\mu_i \geqslant t_2 - \delta\right\} \notin \mathcal{D}$.

مشاهده B: فرض کنید $\epsilon > 0$، فیکس باشد. در اینصورت برای تقریبا هر $i \in I$، مجموعه اندازه پذیر $U_{i,\epsilon} \subseteq M_i$ موجود است به طوری که $\mu_i(U_{i,\epsilon}) \leqslant \epsilon$ و نیز $\int_{U_{i,\epsilon}} f_i d\mu_i \geqslant \frac{\delta}{2}$.

حال برای هر $\epsilon > 0$ ای با استفاده از مشاهده B بالا، $J \in \mathcal{D}$ ای و نیز و برای هر $j \in J$ ، مجموعه $U_{i,\epsilon}$ معرفی شده در مشاهده B را می یابیم. حال با کمک لم ۲، برای هر $i \in J$ داریم:

$$\| f_i \|_p \geqslant \| f_i|_{U_{i,\epsilon}} \|_p \geqslant \frac{\|f_i|_{U_{i,\epsilon}}\|_1}{\mu(U_{i,\epsilon})^{1-\frac{1}{p}}} \geqslant \frac{\delta}{2\epsilon^{1-\frac{1}{p}}}.$$

اما آخرین عبارت با میل کردن ϵ به صفر به سمت ∞ میل می کند. بنابراین با انتخاب ϵ مناسب، برای تقریبا همه iها خواهیم داشت $||f_i||_p > 2\beta$. این نتیجه می دهد که $lim_{\mathcal{D}}(||f_i||_p) > \beta$ که تناقض است.

حال برای برعکس باید ثابت کنیم که $\int_N f \leqslant lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i$. یک $\epsilon > 0$ را فیکس کنید. می توان برای هر j صحیح مثبت یا صفر، c_j را به گونه ای یافت که ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

- $c_0 = 0$
- **برای هر j ای** $c_j < c_{j+1}$ **و** $c_{j+1} - c_j < \epsilon$
- $\mathbb{R}^{\geqslant 0} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}} [c_j, c_{j+1}]$
- **برای هر j، $\nu(V_j) = 0$ که** $V_j := f^{-1}(c_j)$.

با قرار دادن $U_j = \{x \in N, c_{j-1} < f(x) < c_j\}$ داریم:

$$\int_N f d\nu \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} c_j . \nu(V_j) \quad + \sum_{j=1}^{\infty} c_j . \nu(U_j).$$

اما اگر قرار دهیم $B_j^i = \{x \in M_i, c_{j-1} < f_i(x) < c_j\}$ آنگاه $U_j \subseteq [B_j^i]$. بنابراین از آن‌جا که برای هر j ای $\nu(V_j) = 0$، نتیجه می گیریم که:

$$\int_N f \, d\nu \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} c_j . \lim_{\mathcal{D}}(\mu_i(B_j^i)) \quad \leqslant \lim_{\mathcal{D}}(\sum_{j=1}^{\infty} c_j . \mu_i(B_j^i))$$

از آن‌جا که ϵ دلخواه بود خواهیم داشت:

$$\int_N f d\nu \leqslant lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i.$$

به این ترتیب حکم به اثبات می رسد. ■قضیه ۷ (قضیه فراضرب ورژن بیکران): برای هر فرمول $\phi(\bar{x})$ و تقریبا هر (تقریبا به نسبت اندازه) $([a_i^1], \dots, [a_i^n]) \in N^n$ داریم:

$$\phi^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = \lim_{\mathcal{D}}[\phi^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)].$$

اثبات: با استفاده از تعاریف حکم برای فرمولهای اتمی برقرار اند. همچنین بوضوح اگر دو فرمول برقرار باشد آنگاه برای هر ترکیب لاتیسی و جبری (جمع و ضرب اسکالر و ...) نیز برقرار خواهد بود. فرض کنید حکم برای $\phi(x,\bar{y})$ برقرار باشد. اگر $\bar{y}$ تهی باشد آن‌گاه با استفاده از "گزاره کلیدی" اثبات شده در بالا و نیز استفاده از این نکته که $||\phi^{M_i}||_{p_\phi} \leqslant \mathrm{b}_\phi (i \in I)$ خواهیم داشت:

$$\int \phi^N(x)dx = \int \lim_{\mathcal{D}} \phi^{M_i}(x)dx = \lim_{\mathcal{D}} \int \phi^{M_i}(x)dx.$$

حال فرض کنیم $\bar{y}$ ناتهی باشد. می خواهیم قضیه را برای فرمول $\int \phi(\bar{x},\bar{y})d\bar{y}$ به‌اثبات برسانیم. بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد که $\bar{x},\bar{y}$ تک موضعی هستند و با x, y نشانشان می دهیم. هر $y \in N$ بصورت $[y_i]$ قابل نمایش است که برای هر $i \in I$ ای $y_i \in M_i$. تعریف کنید:

$$A := \{[a_i] \in N : \int_N (lim_{\mathcal{D}}\, \phi^{M_i}(a_i, y_i))dy \neq lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} \phi^{M_i}(a_i, y)dy\}.$$

با فرض استقرا می توان دید که برای تقریبا همه $[x_i] \in N$ ها دو تابع $\phi^N([x_i],[y_i])$ و $lim_{\mathcal{D}}\, \phi^{M_i}(x_i, y_i)$ برای تقریبا همه $[y_i] \in N$ ها با هم مساویند. بنابراین تنها کافیست نشان دهیم $\nu(A) = 0$. فرض خلف کنید که $\delta := \nu(A) > 0$. تعریف کنید $\theta := b_\phi . (\frac{4}{\delta})^{\frac{1}{p_\phi}}$. همچنین برای هر $i \in I$ ای تعریف کنید $C_i = \{a \in M_i : ||\phi^{M_i}(a,y)||_{p_\phi} > \theta\}$. با کمک "گزاره ٦ (گزاره کلیدی)"، برای هر $[a_i] \in A$ داریم $lim_{\mathcal{D}}(||\phi^{M_i}(a_i,y)||_{p_\phi}) = \infty$. بنابراین $[a_i] \in [C_i]$. پس $A \subseteq [C_i]$ و $\nu([C_i]) \geqslant \delta$. نتیجه می شود که $k \in I$ ای موجود است به گونه ای که $\mu_k(C_k) > \frac{\delta}{2}$. حال با کمک مشاهده ۵ فصل قبل خواهیم داشت:

$$(||\phi^{M_k}(x,y)||_{p_\phi})^{p_\phi} \geqslant \int_{C_k} (\int_{M_k} |\phi^{M_k}(x,y)|^{p_\phi} dy)dx =$$
$$\int_{C_k} (||\phi^{M_k}(x,y)||_{p_\phi})^{p_\phi} dx \geqslant \theta^{p_\phi} . \mu(C_k) > b_\phi^{p_\phi}$$

که یک تناقض است. به این ترتیب اثبات قضیه بنیادی فراضرب به اتمام می رسد.■

نکته ۸ : حال با اثبات قضیه بنیادی فراضرب در بالا، قضیه فشردگی (نتیجه زیر) از روی آن به طور طبیعی و روتین و با همان روش مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009) (قضیه ٤,٧) و مشابه روش کلاسیک بدست می آید.

نتیجه ۹ (قضیه فشردگی- ورژن بیکران): هر تئوری متناهیا ارضاپذیر ارضاپذیر می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

منطق انتگرال بستر منطقی مهمی برای تلفیق منطق با نظریه‌های اندازه و احتمال می باشد. در این مقاله، ورژنی تعمیم‌یافته و تقویت‌شده از منطق انتگرال معرفی گردید که در آن تعبیر روابط می توانند توابعی در فضاهایL^p که لزوما کراندار هم نیستند باشند و نیز قضایای بنیادی فراضرب و فشردگی نیز با فرمی قویتر و اثباتهایی با تکنیکهای جدید برقرار باشند. با این تعمیم امکان تعامل بیشتر منطق با فضاهایL^p و نیز متغیرهای تصادفی نه لزوما کراندار در احتمال که بخشهای مهمی از آنالیز و احتمالات هستند فراهم می‌گردد. این تعمیم بسیاری از محدودیتهایی که در ورژن کلاسیک منطق انتگرال در قدرت بیان، اصل‌بندی ساختارها و تعامل با ساختارهای ریاضیاتی وجود داشت را رفع می کند و امکان ایجاد کاربردهای بیشتر در تئوری فضاهای تابعی و نظریه احتمالات را فراهم می نماید. یافتن هر چه بیشتر کاربردهای این بستر منطقی جدید در بخشهای مختلف ریاضیات می تواند از مسایل مورد توجه برای مطالعات آینده در این زمینه باشد.

کتابنامه

Bagheri S.M, Pourmahdian M. (2009), The logic of integration, Arch. Math. Logic 48:465-492.

Fajardo S., Keisler H.J. (2002), Model theory of stochastic processes, Lecture Notes in Logic 14 ASL.

Folland G.B (1999), Real analysis, Modern techniques and their applications, second edition.

Hoover D.N (1978), Probability logic, Annals of Mathematical Logic 14, 287-313.

Keisler H.J. (1985), Probability quantifiers, in Model Theoretic Logic, edited by J. Barwise and S. Feferman, Springer-Verlag.

Mofidi, A. (2018), On some dynamical aspects of NIP theories, Arch. Math. Logic 57 (1-2) 37–71.

Mofidi, A. (2020), On partial cubes, well-graded families and their duals with some applications in graphs, Discrete Appl. Math, 283, 207–230.

Mofidi A, Bagheri S.M (2011), Quantified universes and ultraproduct, math. logic quarterly.