Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol.14, No. 1, Spring and Summer 2023, 1-21
Doi: 10.30465/lsj.2023.44427.1424

Paraconsistent naïve truth theories and Curry paradox

Siavash Ahmadzadeh*

Lotfolla Nabavi**

Abstract

Naïve truth, T(x), is a predicate that applies to all of the sentences of the language and also for every sentence A of the language, $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ holds. Tarski for avoiding the liar paradox and trivializing of the language (theory) forced to withdraw from defining the naïve notion of truth and he defined truth of every language in a metalanguage. Proponents of paraconsistency claim that by accepting paraconsistent logics we can retain the naïve truth predicate. A logic would be called paraconsistent if contradiction does not entail everything. But there is another paradox, the Curry paradox, which is related to conditionals and without using EFQ can trivialize naïve theories of truth. In this paper I will argue that although if we add arithmetic and naïve truth predicate to paraconsistent logics we would have a non-trivial theory, but for low deductive power, losing some prospected properties of naïve truth predicate and leaking of inconsistency to pure arithmetic parts, these logics will be unjustifiable.

Keywords: Paraconsistent logics, Curry paradox, Tarski truth theory, naïve truth theory, contraction rule.

* PhD candidate in philosophy-logic, Tarbiat Modares Universiry, siavash.ahmadzadeh@modares.ac.ir

** Professor, Department of Philosophy, Tarbiat Modares University (Corresponding Author), nabavi_l@modares.ac.ir

Date received: 2023/02/16, Date of acceptance: 2023/05/14

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

نظریه‌های صدق عرفی فراسازگار و پارادوکس کری

سیاوش احمدزاده*

لطف‌الله نبوی**

چکیده

صدق عرفی، $T(x)$، محمولی است که در خود زبان بر تمام جمله‌های زبان حمل می‌شود و درضمن برای هر جمله‌ی مانند A در زبان $A \leftrightarrow$ $T(\ulcorner A \urcorner)$ نتیجه می‌شود. تارسکی برای اجتناب از پارادوکس دروغگو و تریویال شدن زبان (نظریه) مجبور شد از مفهوم عرفی صدق دست بکشد و صدق هر زبان را در یک فرازبان تعریف کند. طرفداران منطق‌های فراسازگار ادعا دارند با پذیرش منطق‌های فراسازگار می‌توان محمول صدق عرفی را حفظ کرد. منطق‌های فراسازگار به منطق‌هایی گفته می‌شود که در آن‌ها از تناقض هر چیزی نتیجه گرفته نمی‌شود. اما پارادوکس دیگری به نام کری وجود دارد که مربوط به ادات شرطی است و بدون استفاده از قاعده‌ی انفجار می‌تواند نظریه‌های صدق عرفی را تریویال کند. در این مقاله استدلال خواهیم کرد با وجود این که اگر به منطق‌های فراسازگار اصول حساب و محمول صدق عرفی را اضافه کنیم نظریه‌ای غیرتریویال خواهیم داشت اما این نظریه‌ها به دلیل قدرت استنتاجی پایین، ازدست‌رفتن برخی خواص مورد انتظار از محمول صدق عرفی و همچنین نشت ناسازگاری به قسمت‌های خالص حسابی موجه نخواهند بود.

کلیدواژه‌ها: منطق‌های فراسازگار، پارادوکس کری، نظریه صدق تارسکی، نظریه صدق عرفی، قاعده انقباض.

* دانشجوی دکتری فلسفه–منطق، دانشگاه تربیت مدرس، siavash.ahmadzadeh@modares.ac.ir

** استاد، فلسفه –منطق دانشگاه تربیت مدرس (نویسندهٔ مسئول)، nabavi_l@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۲۷، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۴

۱. مقدمه

نظریه‌های فراسازگار به نظریه‌هایی گفته می‌شوند که بعضی از تناقض‌ها در آن‌ها پذیرفته می‌شود اما چنین نیست که هر جمله‌ای در زبان آن نظریه اثبات‌پذیر باشد. ادعای کلی طرفداران نظریه‌های فراسازگار این است که وجود تناقض‌ها در نظریه‌های علمی و فلسفی اجتناب‌ناپذیر است و بنابراین باید برخی قواعد و اصول منطق را به گونه‌ای تغییر داد که در عین حال که جمله‌های پارادوکسیکال هم خودشان و هم نقیضشان در آن‌ها برقرار هستند، چنین نباشد که که با قاعده‌ی انفجار، از تناقض هر چیزی نتیجه گرفته می‌شود یا به بیان دیگر تمام جمله‌های دیگر زبان نیز اثبات شود.

یکی از نظریه‌هایی که منطقدانان فراسازگار به عنوان انگیزه‌ای برای پذیرش فراسازگاری به آن ارجاع می‌دهند نظریه‌ی صدق عرفی (Naïve truth theory) است. طرفداران نظریه‌ی صدق عرفی ادعا دارند شهود افراد از محمول صدق این است که در زبان تنها یک محمول برای صدق داریم و این محمول را اگر با T نشان دهیم برای هر جمله‌ی زبان همانند A باید داشته باشیم ($A \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$ که $\ulcorner A \urcorner$ نامی برای فرمول A در زبان است[1] (Priest & Tanaka & Weber, 2022). در حالی که وجود چنین محمول صدق عرفی‌ای توسط منطقدان‌های کلاسیک به دلیل ایجاد ناسازگاری و تریویال کردن سیستم رد شده است منطقدان‌های فراسازگار ادعا دارند نظریه‌های آن‌ها می‌تواند محمول صدق عرفی داشته باشد.

ابتدا نگاهی به این بیندازیم که چرا از نظر تارسکی و بقیه‌ی منطقدان‌های بعد از او نمی‌توان محمول صدق عرفی در چارچوب منطق کلاسیک داشت. تارسکی قضیه‌ی تعریف ناپذیری صدق را برای زبان‌های (نظریه‌های) به اندازه‌ی کافی قوی اثبات می‌کند که در آن‌ها قضیه نقطه ثابت (Fixed point) اثبات شود[2] که بر طبق آن در نظریه‌ی $\mathcal{T}$ به ازای هر محمول تک موضعی با یک متغیر آزاد مانند $\varphi(x)$ جمله‌ای مانند A وجود دارد که $\vdash_{\mathcal{T}} A \leftrightarrow \varphi(\ulcorner A \urcorner)$. تناقض محصول تعارض $A \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$ و $A \leftrightarrow \neg T(\ulcorner A \urcorner)$ (به نقطه ثابت $\neg T(\ulcorner x \urcorner)$ جمله دروغ‌گو گفته می‌شود) خواهد بود که از جانشینی $\neg T(\ulcorner x \urcorner)$ به جای $\varphi(x)$ در قضیه‌ی نقطه ثابت به‌دست می‌آید. نکته‌ی مهمی که از این مطلب نتیجه می‌شود این است که رد محمول صدق عرفی در چارچوب منطق کلاسیک نه نتیجه‌ی خود منطق کلاسیک خالص بلکه نتیجه‌ی نظریه‌هایی مانند حساب پئانو یا نظریه مجموعه‌ی کلاسیک است پس هر گونه تصمیم‌گیری در مورد شایستگی نظریه‌های فراسازگار یا هر گونه رقیب دیگر منطق کلاسیک برای تعریف صدق باید در نظریه‌های حساب یا مجموعه‌ی بر پایه‌ی این منطق‌ها گرفته شود نه خود منطق

خالص آن‌ها چون در منطق خالص جمله‌ی دروغگویی اثبات نمی‌شود که با $A \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$ تعارض داشته باشد.

برای روشن‌تر شدن مطلب لازم است تفاوت پارادوکس در زبان طبیعی و نظریه‌های صوری که موضوع این مقاله است با دقت بیشتری بررسی شود. در زبان روزمره گوینده‌ی زبان، برخلاف یک نظریه‌ی صوری، می‌تواند جمله‌های مختلفی را بیان کند بدون این که لازم باشد اثباتی برای آن‌ها بدهد. اما جمله‌هایی که یک نظریه‌ی صوری بیان می‌کند یا اصول موضوعه‌ی آن هستند یا از آن‌ها با استفاده از قواعد سیستم به دست آمده‌اند. پس چنین نیست که نظریه‌ی صوری هر جمله‌ی درست ساخت زبان خود را بیان کند. تناقضی که منجر به قضیه‌ی تعریف ناپذیری صدق تارسکی می‌شود محصول اضافه کردن اصل شهودی $A \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$ به نظریه‌ی حساب است که محمول $T(x)$ به زبان آن اضافه شده است نه محصول فرض همزمان شاکله‌ی صدق ($A \leftrightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$) و جمله‌ی پارادوکسیکال ($A \leftrightarrow \neg T(\ulcorner A \urcorner)$). پس اگر در منطقی قضیه‌ی نقطه ثابت اثبات نشود برای داشتن جمله‌ی پاردوکسیکال لازم خواهد بود آن به عنوان یک فرض یا یک اصل موضوعه به سیستم اضافه شود تا توسط نظریه بیان شود که در هیچ کدام از این موارد نمی‌توان معقولیتی یافت. زیرا فرض کردن آن معادل با فرض نقیض یکی از جمله‌های سیستم خواهد بود که آشکار است فرض خوبی نیست و در صورت اصل موضوعه قرار دادن آن نیز باید گفت که اصل موضوعه باید چیزی در مورد رفتار آن محمول بگوید که مورد انتظار ما از مفهومی است که صوری سازی می‌کنیم و بیان جمله‌ی $A \leftrightarrow \neg T(\ulcorner A \urcorner)$ به‌نظر نمی‌رسد جزو شهودهای ما از رفتار محمول صدق باشد.

نظریه‌های فراسازگار تا حدی می‌توانند با تغییر قواعد مربوط به نقض پارادوکس‌های مربوط به نقض مانند پارادوکس دروغگو را کنترل کنند اما در حضور ادات شرطی و خود ارجاعی احتمال دارد نوع دیگری از پارادوکس به نام پارادوکس کری (Curry paradox) رخ دهد. شاخصه‌ی مشترک همه‌ی پارادوکس‌هایی که به نام «پارادوکس کری» شناخته می‌شوند این است که به نحوی با مفاهیمی از قبیل شرط، نتیجه می‌دهد، بدست می‌آید و ... در فرم عملگری یا فرم محمولی مرتبط است (Shapiro & Beall, 2021).

جمله‌ی کری جمله‌ای است که معادل با یک شرطی است که خود مقدم آن (یا معادل با مقدم آن) است. برای این که جمله‌ی پارادوکسیکال شامل جمله‌ی کری توسط نظریه‌ای فرمال بیان[۳] شود باید قضیه‌ی نقطه ثابت در آن نظریه اثبات شود و در آن به جای $\varphi(x)$ قرار دهیم $T(\ulcorner x \urcorner) \to B$ (به نقطه ثابت $T(\ulcorner x \urcorner) \to B$ جمله‌ی کری گفته می‌شود). نظریه‌ی حساب در منطق

کلاسیک (نظریه‌ی پئانو) برای اثبات لم قطری سازی کافی است[۴] و بنابراین اگر محمول صدق عرفی را به این نظریه اضافه کنیم استدلال زیر را بر اساس جمله‌ی کری مربوط به صدق (سطر 1) می‌توان صورتبندی کرد:

1) $\vdash A \leftrightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	لم قطری سازی (جانشینی[۵])
2) $T(\ulcorner A \urcorner) \vdash T(\ulcorner A \urcorner)$	فرض
3) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$	شاکله‌ی صدق
4) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$	حذف عطف (3)
5) $T(\ulcorner A \urcorner) \vdash A$	وضع مقدم (2) و (4)
6) $\vdash A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	حذف عطف (1)
7) $T(\ulcorner A \urcorner) \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B$	وضع مقدم (5) و (6)
8) $T(\ulcorner A \urcorner), T(\ulcorner A \urcorner) \vdash B$	وضع مقدم (2) و (7)
9) $T(\ulcorner A \urcorner) \vdash B$	انقباض ساختاری (8)
10) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B$	معرفی شرطی (9)
11) $\vdash (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow \mathrm{A}$	حذف عطف (1)
12) $\vdash A$	وضع مقدم (10) و (11)
13) $\vdash A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$	حذف عطف (3)
14) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner)$	وضع مقدم (12) و (13)
16) $\vdash B$	وضع مقدم (9) و (14)

و این یعنی هر فرمولی که در زبان نظریه بیان شود قضیه نظریه خواهد بود. برای متوقف‌کردن این استدلال باید یکی از قاعده‌های وضع مقدم و یا معرفی شرطی (CP) و یا انقباض ساختاری[۶] را از کار انداخت[۷]. در صورتی که ازقاعده‌ی فرض استفاده نکنیم می‌توان تنها با استفاده از قضیه‌های منطق کلاسیک استدلال زیر را به پیش برد. که در این صورت گزینه‌های معقول پیش روی ما برای جلوگیری از تریویال شدن نظریه عبارت خواهند بود از حذف قاعده‌ی انقباض یا وضع مقدم.

1) $A \leftrightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	لم قطری سازی (جانشینی)
2) $T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$	قاعده‌ی صدق عرفی و حذف عطف
3) $\big(A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)\big) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B))$	تعدی و (2)
4) $A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	حذف عطف (1)
5) $T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	وضع مقدم (1) و (4)
6) $T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B$	انقباض (5)

7) $(T(\ulcorner A \urcorner) \to B) \to A$	حذف عطف (1)
8) A	وضع مقدم (6) و (7)
9) $A \to T(\ulcorner A \urcorner)$	قاعده‌ی صدق عرفی و حذف عطف
10) $T(\ulcorner A \urcorner)$	وضع مقدم (8) و (9)
11) B	وضع مقدم (6) و (10)

اکنون به بررسی راه حل‌های منطقدان‌های فراسازگار برای جلوگیری از تریویال شدن نظریه می‌پردازیم. گراهام پریست که از مهمترین منطقدان‌های طرفدار فراسازگاری است نظریه‌ای فراسازگار برای محمول صدق عرفی ساخته است که توسیعی از منطق فراسازگار معروف LP است. در بخش ۱ منطق LP به صورت مختصر معرفی می‌شود و نشان می‌دهیم چرا این منطق مناسب نظریه‌های عرفی نیست و باید به سمت منطق‌های قوی‌تر فراسازگار حرکت کرد. در بخش ۲ منطق BX و نظریه‌ی صدق عرفی ساخته شده بر پایه‌ی آن را معرفی می‌کنیم و همچنین یک سیستم استنتاج طبیعی برای آن خواهیم ساخت. سپس در بخش سوم ویژگی‌های نظریه‌ای که از اضافه کردن اصول حساب به این نظریه‌ی عرفی نتیجه می‌شود، و به ویژه قضیه‌ی نقطه ثابت (Fixed point lemma) که برای بیان جمله‌ی خودارجاعی توسط نظریه‌های صوری ضروری است، را بررسی می‌کنیم. استدلال خواهیم کرد که نظریه‌ی بدست آمده برای اثبات قضیه‌های حسابی ضعیف است و حتی اگر فرض شود که این نظریه‌ها قدرت استنتاجی مورد نظر را داشتند باز نتایج بدست آمده از آن نظریه قابل‌پذیرش نیست.

۲. نظریهٔ عرفی صدق بر پایه‌ی منطق *LP*

منطق LP با جدول ارزش زیر شناخته می‌شود (Priest, 2002):

$\neg$	
t	f
b	b
f	t

$\wedge$	f	b	t
f	f	f	f
b	f	b	b
t	f	b	t

$\vee$	f	b	t
t	f	b	t
b	b	b	t
t	t	t	t

$\rightarrow$	f	b	t
f	t	t	t
b	b	b	t
t	f	b	t

توجه: می‌توان ادات $\neg$ و $\vee$ را به عنوان پایه در نظر گرفت و بقیـه ادات را از روی آن بـه همان شیوه‌ی کلاسیک تعریف کرد. همچنین ارزش جملات حاوی سورها نیز به صورت زیـر به دست می‌آید:

$$\forall x(\varphi(x)) = \begin{cases} 1\ iff\ \varphi(a) = 1\ for\ every\ a \in D \\ 0\ iff\ \varphi(a) = 0\ for\ some\ a \in D \\ \frac{1}{2}\ o.t \end{cases}$$

$$\exists x(\varphi(x)) = \begin{cases} 1\ iff\ \varphi(a) = 1\ for\ some\ a \in D \\ 0\ iff\ \varphi(a) = 0\ for\ all\ a \in D \\ \frac{1}{2}\ o.t \end{cases}$$

(برای فرمول‌های با تعداد متغیر بیشتر نیز به سادگی می‌توان تعریف را گسترش داد).

همچنین تعریف‌های زیر را درباره‌ی استنتاج معنایی در LP داریم:

$$\vDash_{LP} \varphi\ iff\ I(\varphi) = t\ \ or\ b\ \ for\ all\ I$$

$$\Delta \vDash_{LP} \varphi\ iff\ I(\theta) = t\ or\ b\ for\ all\ \theta \in \Delta\ then\ I(\varphi) = t\ or\ b$$

در جدول ارزش فوق t را به معنی صادق، f را به معنی کاذب و b را به معنی هم صادق و هم کاذب در نظر بگیرید. برای سیستم استنتاجی LP می‌توان سیستم استنتاج طبیعی زیـر را کـه نسبت به این سمانتیک داری صحت (soundness) و تمامیت (completeness) است پیشـنهاد داد (Priest, 2002):

$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge I$	$\dfrac{A \wedge B}{A \backslash B}$	$\wedge E$

$\dfrac{A \backslash B}{A \vee B}$	$\vee I$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$	$\vee I$

قواعد دمورگان

$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$		$\frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$	

$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}$		$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$	

$\frac{A}{\neg\neg A}$	$\neg\neg I$	$\frac{\neg\neg A}{A}$	$\neg\neg E$

$\frac{}{A \vee \neg A}$	$Excluded\ middle$	

$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A(\frac{x_i}{x})\end{matrix}}{\forall x A}$	$\forall I$	$\frac{\forall x A}{A(\frac{t}{x})}$	$\forall E$

$\frac{A(\frac{t}{x})}{\exists x A}$	$\exists I$	$\frac{\exists x A \quad \begin{matrix} A\left(\frac{x_i}{x}\right) \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}$	$\exists E$

توجه شود در قاعده$(\forall I)$ x_i در A و هیچ کدام از فرض‌هایی که A بر آن‌ها استوار است آزاد نیست. همچنین در قاعده‌ی $(\exists E)$ x_i در C و هیچ کدام از فرض‌های باز بالای آن جز در $A\left(\frac{x_i}{x}\right)$ آزاد نیست.

در نگاه اول منطق LP بسیار مطلوب به نظر می‌رسد زیرا می‌توان نشان داد تمام قضیه‌های منطق کلاسیک قضیه‌ی LP هستند و برعکس.

قضیه: قضیه‌های منطق LP و کلاسیک اینهمان هستند.

اثبات[۸]:

نشان می‌دهیم هر قضیه‌ی LP قضیه‌ی کلاسیک است. طبق قضیه‌های تمامیت و صحت قضیه‌ی‌های LP قضیه‌هایی هستند که به ازای هر ارزشدهی ارزش آن‌ها یا t می‌شود یا b. از روی جدول ارزش به راحتی می‌توان مشاهده کرد که ارزش یک گزاره مانند A تنها در صورتی b می‌شود که ارزش یکی از اجزاء آن b باشد. پس اگر به اجزاء A تنها t و f داده شود ارزش A همواره t خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم هر قضیه‌ی کلاسیک قضیه‌ی LP نیز است. باید نشان دهیم اگر فرمولی مدل نقض کلاسیک نداشته باشد مدل نقض LP هم ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم A مدل نقض LP داشته باشد ($v(A) = f$). اگر تنها از t و f برای ارزشدهی به اجزاء آن استفاده کرده باشیم که همان مدل نقض کلاسیکی هم برای A می‌شود که

تناقض است. پس فرض می‌کنیم از b استفاده کرده‌ایم. با نگاه به سمانتیک LP می‌توان مشاهده کرد اگر مدل نقضی (v) با استفاده از b برای A وجود داشته باشد با جانشین کردن t هم به جای b مدل نقض کلاسیکی هم (v_c) برای A وجود خواهد داشت. اگر A اتمی باشد که در هیچ کدام قضیه نخواهد بود. اگر $A = A_1 \wedge A_2$ تنها در صورتی ارزش A برابر f می‌شود که ارزش حداقل یکی از A_1 یا A_2 برابر f باشد و دیگری چه b باشد چه t فرقی ندارد. درصورتی که $A = A_1 \vee A_2$ و ارزش یکی از یکی از A_1 یا A_2 برابر b باشد ارزش A قطعاً f نخواهد شد. برای شرط مشابه خواهد بود. پس در هر صورت به تناقض می‌رسیم.□

اگر سمانتیک کلاسیک را داشته باشیم در صورت برقراری جمله‌ی پارادوکسیکال $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ ارزش B همواره برابر t خواهد بود اما در سمانتیک LP می‌توان ارزش‌دهی‌ای پیدا کرد که هم جمله‌ی پارادوکسیکال در آن برقرار باشد و هم ارزش B برابر با f باشد به این صورت که $v(A) = b$ و $(V(B) = f)$. پس پارادوکس کری LP را تریویال نمی‌کند. اگر بخواهیم از دید نظریه برهان نیز به پارادوکس نگاه بیندازیم خواهیم دید که گام‌های شامل وضع مقدم در استدلال پارادوکسیکال برقرار نخواهد بود و بنابراین استدلال پیش نخواهد رفت. این استدلال اصلی طرفداران فراسازگاری برای حمایت از منطق LP در برابر منطق کلاسیک در مواجهه با پارادوکس کری است.

با این حال منطق LP منطق چندان مناسبی به نظر نمی‌رسد زیرا از این که تمامی قضیه‌های منطق کلاسیک در LP نیز نتیجه می‌شوند نمی‌توان نتیجه گرفت که قدرت استنتاجی آن نیز به اندازه‌ی سیستم کلاسیک است. در LP استنتاج‌های زیر نامعتبر هستند:

1) $A \wedge \neg A \vdash B$
2) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
3) $A, \neg A \vee B \vdash B$
4) $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$
5) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \vdash \neg A$
6) $A \rightarrow (B \wedge \neg B) \vdash \neg A$
7) $A, A \rightarrow B \vdash B$

به سادگی می‌توان برای هر کدام از آن‌ها مدل نقض ارائه داد. به عنوان مثال برای (7) ارزش A را برابر با b و ارزش B را برابر با f بگیرید. در این صورت با توجه به جدول ارزش LP ارزش $A \rightarrow B$ برابر b خواهد بود. در نتیجه مقدمات برقرار خواهند بود اما نتیجه نه.

نداشتن قاعده‌ی وضع مقدم در مورد ادات شرطی LP باعث می‌شود اگر اصل‌های دیگر نظریه‌های دیگری همچون اصل‌های PA یا اصل‌های مربوط به صدق را به نظریه برهان آن

اضافه کنیم نتوانیم از آن‌ها قضیه‌های بسیار ساده‌ی حساب و سمانتیک را نیز به دست آوریم. مهم‌ترین چالش در برابر اضافه کردن چنین شرطی‌ای پارادوکس کری است. به همین جهت پریست تصمیم می‌گیرد که سیستم فراسازگار قوی‌تری که بتوان در آن نوعی شرطی داشت که قاعده‌ی وضع مقدم در مورد آن برقرار باشد بسازد و در عین حال در برابر پارادوکس کری مصون باشد. سیستم پریست از منطق B، که از آن به عنوان پایه‌ی منطق‌های ربطی نام برده می‌شود[۹]، به اضافه‌ی اصل طرد شق ثالث (X) ساخته می‌شود.

۳. نظریهٔ عرفی صدق بر پایه‌ی منطق BX

منطق BX شامل اصول موضوعه و قاعده‌های زیر می‌شود: (Priest,2002)[۱۰] :

$A1)\ A \to A$
$A2)\ A \to A \vee B$
$A3)\ B \to A \vee B$
$A4)\ A \wedge B \to A$
$A5)\ A \wedge B \to B$
$A6)\ \neg\neg A \leftrightarrow A$
$A7)\ A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A8)\ (\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$
$A9)\ (\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$
$A10)\ (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$
$A11)\ (A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$
$A12)\ A \vee \neg A$
$A13)\ \forall xA \to A(\frac{t}{x})$
$A14)\ A(\frac{t}{x}) \to \exists xAt$
$A15)\ (A \wedge \exists xB) \to \exists x(A \wedge B)$
$A16)\ \forall x(A \vee B) \to (A \vee \forall xB)$
$A17)\ \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B)$
$A18)\ \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$
$R1)\ \frac{A,B}{A \wedge B}$
$R2)\ \frac{A, A \to B}{A}$
$R3)\ \frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$
$R4)\ \frac{A \to B \quad C \to D}{(B \to C) \to (A \to D)}$
$R5)\ \frac{A}{\forall xA}$

BXT از اضافه کردن محمول صدق عرفی به BX ساخته می‌شود. همچنین اگر اصول زیر را به BX اضافه کنیم نظریه‌ی حسابی $BX\#$ به دست می‌آید.

$BXA1)\ x = x$
$BXA2)\ x = y \rightarrow y = x$
$BXA3)\ y = z \rightarrow (x = y \rightarrow x = z)$
$BXA4)\ \neg x' = 0$
$BXA5)\ x = y \rightarrow x' = y'$
$BXA6)\ x' = y' \rightarrow x = y$
$BXA7) x + 0 = x$
$BXA8)\ x + y' = (x + y)'$
$BXA9)\ x.0 = 0$
$BXA10)\ x.y' = (x.y) + x$
$INR)\ \varphi(0), \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') \vdash \forall x \varphi(x)$

اصل $BXA3$ و INR با صورت معمول خود در PA تفاوت دارند که دلیل آن به خاطر ویژگی‌های متفاوت عملگر شرط است. اما در هر صورت اصل‌های بالا شکل‌های معمول را نتیجه می‌دهند. در این جا از اثبات سازگاری BX و $BXT\#$[11] صرف نظر می‌کنیم[12]. بیل ادعا می‌کند منطق BX با محدود کردن قاعده‌ی معرفی شرطی (CP) جلو استدلال پارادوکسیکال کری را می‌گیرد (Beall, 2021). این ادعای بیل را می‌توان بررسی کرد. اگر قضیه‌ی نقطه ثابت در $BX\#$ قابل اثبات باشد آنگاه سطر (1) در $BXT\#$ اثبات می‌شود:

1) $\vdash [A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)] \wedge [(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow A]$	جمله پارادوکسیکال کری
2) $\vdash ([A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)] \wedge [(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow A]) \rightarrow (A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B))$	$A4$
3) $\vdash A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	$R2$ (1) و (2)
4) $(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner))$	شمای صدق
5) $\left[(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A) \wedge \left(A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner)\right)\right] \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A)$	$A4$
6) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$	$R2$ (4) و (5)
7) $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B))$	$R4$ *(6)* و *(3)*
8) $\vdash A \rightarrow A$	$A1$
9) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)$	$R2$ (7) و (8)
10) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B$	***انقباض*** (9)
11) $\vdash ([A \rightarrow (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B)] \wedge [(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow A]) \rightarrow [(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow A]$	$A5$
12) $\vdash (T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B) \rightarrow A$	$R2$ *(11)* و *(1)*
13) $\vdash A$	$R2$ (10) و (12)
14) $\vdash \left[(T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A) \wedge \left(A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner)\right)\right] \rightarrow \left(A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner)\right)$	$A5$
15) $\vdash A \rightarrow T(\ulcorner A \urcorner)$	$R2$ و (14) و (4)
16) $\vdash T(\ulcorner A \urcorner)$	$R2$ و (13) و (15)
17) $\vdash B$	$R2$ (10) و (16)

استدلال بالا در نظام اصل موضوعی $BXT\#$ به گونه‌ای تنظیم شده است از معرفی شرطی در آن استفاده نشده باشد. تنها راه جلوگیری از پارادوکس حذف قاعده‌ی انقباض، سطر ۹، است که در BX وجود ندارد. پس تنها از کار انداختن CP کافی نیست و باید در کنار آن به حذف قاعده‌ی انقباض نیز اشاره کرد.

چیزی که بیل در نظر دارد باید استنتاج گسترش یافته در سیستم هیلبرتی، یعنی استنتاج از مجموعه‌ی فرض‌ها، باشد: $\Gamma \vdash A$ اگر دنباله‌ای از فرمول‌های زبان وجود داشته باشد که هر کدام یا از اصول موضوعه هستند ($A1$ تا $A18$) یا از اعضای Γ و یا از قبل از خود با یکی از قواعد $R1$ تا $R5$ به دست آمده‌اند. در این صورت CP تبدیل خواهد شد به این که قضیه‌ی استنتاج (Deduction theorem) برای سیستم برقرار نخواهد بود. برقرار نبودن CP در سیستم توسعه یافته[۱۳] موجب می‌شود که نتوان سیستم استنتاج طبیعی و یا حساب رشته‌ای برای این منطق‌ها به آسانی طراحی کرد زیرا برای اثبات اصل موضوعه‌هایی که به صورت شرطی هستند به معرفی شرط از فرض‌ها نیاز خواهد بود. اما برای استنتاج از قضیه‌ها (سیستم هیلبرتی بدون فرض[۱۴]) می‌توان سیستم استنتاج طبیعی برای BX ساخت و معادل بودن آن دو را نشان داد.

برای ساختن سیستم استنتاج طبیعی منطق BX لازم است که فرمول‌های داخل X، یعنی فرض‌ها، به دو شیوه‌ی متفاوت کنار هم قرار گیرند که متناظر دو نوع عطف باشند. آن نوع از کنار هم قرار گرفتن را که متناظر عطف مصداقی است با "," و نوع دو دوم را که متناظر با کنار هم قرار گرفتن مفهومی است با ";" نمایش می‌دهیم[۱۵].

تعریف: دنباله‌ی $X \vdash A$ که در آن A یک فرمول و X گردایه‌ای ساختارمند و متناهی از فرمول‌های زبان است را یک استنتاج طبیعی می‌نامیم. X یک دسته نامیده می‌شود. همچنین $X(Y)$ نشان‌دهنده‌ی رخداد دسته‌ی Y به عنوان یک زیردسته در X است.

تعریف: منطق NBX شامل قاعده‌های زیر می‌شود:

قواعد ساختاری

$\dfrac{X,(Y,Z) \vdash A}{(X,Y),Z \vdash A}$	eB	$\dfrac{X,Y \vdash A}{Y,X \vdash A}$	eC

$\dfrac{X,X \vdash A}{X \vdash A}$	eW	$\dfrac{X \vdash A}{X,Y \vdash A}$	eK

قاعده‌ی (اصل موضوعه) اینهمانی	$\frac{}{A \vdash A}$

قاعده‌های عملگری

$\frac{X \vdash A \quad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B}$	$\wedge I$	$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A \backslash B}$	$\wedge E$
$\frac{X \vdash A \backslash B}{X \vdash A \vee B}$	$\vee I$	$\frac{X \vdash A \vee B \quad Y(A) \vdash C \quad Y(B) \vdash C}{Y(X) \vdash C}$	$\vee E$
$\frac{A; X \vdash B}{X \vdash A \to B}$	$\to I$	$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash A \to B}{X; Y \vdash B}$	$\to E$
$\frac{A \vdash \neg B \quad X \vdash B}{X \vdash \neg A}$	$\neg I$		
$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A}$	$\neg\neg I$	$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A}$	$\neg\neg E$
$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}$	*Excluded Middle*		
$\frac{X \vdash A}{X \vdash \forall x A}$	$\forall I$	$\frac{X \vdash \forall x A}{X \vdash A(t)}$	$\forall E$
$\frac{X \vdash A(t)}{X \vdash \exists x A(x)}$	$\exists I$	$\frac{X \vdash \exists x A(x) \quad Y\big(A(x)\big) \vdash B}{Y(X) \vdash B}$	$\exists E$

می‌توان نشان داد $\vdash_{BX} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{NBX} A$. (اثبات در پیوست)

در سیستم استنتاج طبیعی فوق به راحتی می‌توان مشاهده کرد که قاعده‌ی انقباض ساختاری به شکل $\frac{X;X\vdash A}{X\vdash A}$ برقرار نیست. بنابراین این که بگوییم قاعده‌ی انقباض ساختاری در سیستم برقرار است کاملاً بستگی به این خواهد داشت که در کدام سیستم استنتاجی کار می‌کنیم. هر چند نمی‌توان این مورد را اشتباه دانست اما به صورت تاریخی قواعد ساختاری برای حساب رشته و حساب استنتاج طبیعی مطرح شده‌اند و در سیستم حساب رشته یا استنتاج طبیعی معادل BX قاعده‌ی ساختاری انقباض وجود ندارد.

۴. ضعف‌های نظریه‌های صدق عرفی فراسازگار

یک مشکل نه چندان بزرگ $BX\#$ توانایی استنتاج قضیه‌های حساب است. منطق‌های فراسازگار چون اجازه نمی‌دهند از تناقض هر چیزی نتیجه شود به نوعی معیار مرتبط بودن مقدمات و

نتیجه را در استنتاج وارد می‌کنند. منطق‌های آن‌ها بنابراین عضوی از خانواده‌ی منطق‌های ربط خواهد بود. اگر اصول حساب در منطق ربط صورتبندی شود به آن حساب ربطی می‌گویند و معمولاً با $R\#$ نمایش می‌دهند. اصل‌ها و قواعد مربوط به BX، غیر از X که آن هم قضیه‌ی R است، اصل‌ها و قواعد R نیز هستند و بنابراین اگر $R\#$ نتواند چیزی را اثبات کند $BX\#$ نیز نخواهد توانست[۱۶]. اجازه دهید به زبان $R\#$، و $BX\#$، ثابت t را با قواعد زیر به سیستم اصل موضوعی اضافه کنیم:

$t \to A \dashv\vdash A$	$t - definition$

اگر f را به صورت $\neg t$ تعریف کنیم خواهیم داشت: $PA \vdash A \Rightarrow R\# \vdash A \vee f$. پس $BX\#$ که از سیستم $R\#$ ضعیف‌تر است توانایی اثبات قضیه‌های حساب را تنها به صورت مشابه $R\#$ خواهد داشت.

مشکل دیگری که باید در نظر داشت این است که طرفداران نظریه‌های فراسازگار هنوز نتوانسته‌اند نشان دهند توابع و مجموعه‌های بازگشتی در آن‌ها نمایش‌پذیر هستند و بنابراین نمی‌توانند نشان دهند نظریه‌ی آن‌ها قادر به اثبات قضیه‌ی نقطه ثابت است[۱۷]. پس نمی‌توانند ادعا کنند که نظریه‌ی آن‌ها خود جمله‌های دروغگو و کری را اثبات می‌کند. در نتیجه می‌توان اعتراض کرد که نظریه‌ی صدق عرفی منطقدان فراسازگار اساساً سازگار است، هر چند می‌تواند ناسازگاری را نیز بدون تریویال شدن داشته باشد، زیرا جمله‌ی کری و دروغگویی در آن اثبات نشده است که پارادوکسی در آن ایجاد شده باشد و ناسازگار شوند. طرفدار نظریه‌ی فراسازگار در جواب می‌تواند بگوید شاید نتوان جمله‌ی پارادوکسیکال را در نظریه‌ی فراسازگار اثبات کرد اما مزیتی که نسبت به منطق کلاسیک دارد این است که فرض برقرار بودن چنین جمله‌ای منطق را تریویال نمی‌کند. اما قضاوت ما درباره‌ی یک نظریه نه بر اساس وضعیت فرض‌ها (چیزهایی که در خود نظریه نیستند) بلکه بر اساس قضیه‌های آن است (چیزهایی که برای ما آشکار می‌کند) و در مورد قضیه‌ها به سادگی می‌توان ادعا کرد که نظریه‌ی کلاسیک نسبت به فراسازگار ارجحیت بسیار بیشتری دارد. از سوی دیگر در حساب کلاسیک مسئله این است که اگر تنها اصل شهودی $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ را به آن اضافه کنیم تریویال می‌شود اما در این جا فرض‌کردن همزمان شمای نامقید صدق و جمله‌ی دروغگو همان فرض کردن تناقض است و منطقدان کلاسیک می‌تواند معترض شود که در این جا وضعیت اساساً متفاوت است و فرض‌کردن تناقض اساساً کار اشتباهی است.

اما اگر فرض کنیم جمله‌ی دروغگو در $BXT\#$ برقرار است یا روزی ثابت شود که تمام قضیه‌های PA از جمله قضیه‌ی نقطه ثابت در آن اثبات می‌شود، هر چند نامحتمل است، باز هم منطقدان فراسازگار با چالشی جدی مواجه خواهد شد. یکی از انتظارات بسیار مهم از هر نظریه‌ی صدق عرفی‌ای، از جمله $BXT\#$، این خواهد بود که اثبات کند هر چیزی که در نظریه اثبات‌پذیر است صادق نیز است (قضیه‌ی صحت) و این عدم نیاز به فرازبان یکی از انگیزه‌های اصلی برای دفاع از نظریه‌ی صدق عرفی است.

برای اثبات صحت باید نشان دهیم که تمام اصول موضوعه BX و PA، از جمله شمای استقراء، در $BXT\#$ صادق هستند و همچنین قواعد منطق صدق نگهدار هستند. در حالت معمول صدق نگهدار بودن قواعد از شمای نامقید صدق و CP به دست می‌آید اما چون در BX قاعده‌ی CP برقرار نیست باید صدق نگهداری قواعد را فرض کرد. چنین فرضی موجب می‌شود که پارادوکس کری بار دیگر به کار افتد و نظریه را تریویال کند. استدلال آن به شکل زیر خواهد بود:

1) $\vdash T(\ulcorner A \wedge (A \to B)\urcorner) \to T(\ulcorner B\urcorner)$	صدق نگهدار بودن وضع مقدم
2) $\vdash (A \wedge (A \to B)) \to B$	شمای نامقید صدق و جانشانی معادل‌ها و (1)
3) $\vdash A \leftrightarrow (A \to B)$	جمله‌ی کری و شمای نامقید صدق
4) $\vdash (A \wedge A) \to B$	جانشانی معادل‌ها (2) و (3)
5) $\vdash A \to B$	جانشانی معادل ها و (4)
6) $\vdash A$	وضع مقدم (3) و (5)
7) $\vdash B$	وضع مقدم (5) و (6)

منطقدان فراسازگار ممکن است ادعا کند که استدلال‌های معتبر صدق نگهدار نیستند (Beall, 2009). چنین حرفی اگر به خودی خود حرف چندان عجیبی نباشد، که هست، برای منطقدانان فراسازگار که از مدل تئوری و صدق نگهداری برای اثبات فراقضایای مربوط به BX و $BXT\#$ استفاده می‌کنند عجیب خواهد بود. مگر این که ادعا کنند که برای صدق فرازبانی صدق نگهداری داریم اما برای صدق زبانی، یعنی T، صدق نگهداری برقرار نیست که این خود مجدداً قائل شدن به این است که زبان بیش از یک نوع محمول صدق دارد و پروژه‌ی فراسازگاری نادرست است.

حال اجازه دهید فرض کنیم این مشکل را نیز فعلاً فراموش کرده‌ایم و همچنین با روشی دیگر یا اصلاً تحت فرض یا به عنوان اصل موضوعه داریم $BXT \vdash Bew_{BXT\#}(\ulcorner G\urcorner) \to T(\ulcorner G\urcorner)$. در این صورت استدلال زیر را می‌توان نوشت:

1) $BXT\# \vdash G \leftrightarrow \neg Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner)$	قضیه‌ی نقطه ثابت
2) $BXT\# \vdash Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow T(\ulcorner G \urcorner)$	صحت
3) $BXT\# \vdash T(\ulcorner G \urcorner) \leftrightarrow G$	شاکله‌ی صدق
4) $BXT\# \vdash Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow G$	سطر 2 و 3
5) $BXT\# \vdash \neg G \rightarrow G$	سطر 1 و 4
6) $BXT\# \vdash G$	منطق گزاره‌های کلاسیک
7) $BXT\# \vdash Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner)$	ویژگی $Bew_{BXT\#}$
8) $BXT\# \vdash \neg G$	منطق و (1) و (7)
9) $BXT\# \vdash \neg Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner)$	منطق (1) و (8)

چون از طرفی فرض کردیم که $BXT\#$ توسیعی از PA است و از طرف دیگر مجموعه‌ی اثبات‌ها در $BXT\#$ مانند هر نظریه‌ی صوری دیگری یک مجموعه‌ی بازگشتی است پس در PA و $BXT\#$ نمایش‌پذیر است. اگر این که x کد گودلی اثباتی برای y در $BXT\#$ است را با $Prf_{BXT\#}(x,y)$ نشان دهیم آنگاه اگر m کد گودلی اثباتی برای n در $BXT\#$ باشد خواهیم داشت $PA \vdash Prf_{BXT\#}(m,n)$ $(BXT \vdash Prf_{BXT\#}(m,n))$ و اگر m کد گودلی اثباتی برای n در $BXT\#$ نباشد خواهیم داشت $PA \vdash \neg Prf_{BXT\#}(m,n)$ $(BXT \vdash \neg Prf_{BXT\#}(m,n))$. از سطر (6) استدلال بالا خواهیم داشت که عددی مانند g کد گودلی اثبات G است پس $BXT\# \vdash Prf_{BXT\#}(g,G)$. از طرف دیگر سطر (9) نشان می‌دهد که $BXT\# \vdash \neg\exists x Prf_{BXT}(x,G)$ پس داریم $BXT\# \vdash \neg Prf_{BXT\#}(g,G)$. از این دو خواهیم داشت $BXT\# \vdash Prf_{BXT\#}(g,G) \wedge \neg Prf_{BXT\#}(g,G)$. اما این تناقض در قسمت خالص حسابی روی داده است پس نه تنها قسمت سمنتیکی نظریه‌ی فراسازگار بلکه قسمت ریاضیاتی آن نیز دارای تناقض است. هر چند منطقدانان فراسازگار همچون پریست ادعا می‌کنند که در ریاضیات نیز تناقض وجود دارد اما توجیه چنین تناقضی حتی برای آن‌ها نیز آسان نخواهد بود زیرا همان گونه که شپیرو (Shapiro, 2002) بیان می‌کند g را که یک کد گودلی است می‌توان دوباره به یک اثبات، هر چند بسیار طولانی ولی متناهی، تبدیل کرد و در اثبات ابهامی وجود ندارد. یک دنباله از فرمول‌ها یا اثباتی برای یک جمله است یا نه و چک کردن آن کار غیرممکنی نخواهد بود. باور به این که چیزی هم اثبات یک فرمول است و هم نیست واقعاً چندان پذیرفتنی نخواهد بود[۱۸].

۵. نتیجه‌گیری

منطق‌های فراسازگار پیشنهاد شده که بر اساس آن‌ها بتوان نظریه‌ای دارای صدق عرفی ساخت که بتواند راجع به صدق‌های حساب قضیه‌های مورد انتظار را اثبات کند دارای نقص‌های جدی‌ای در قدرت استدلالی هستند. نشان دادیم که حساب‌های ساخته شده بر اساس این نظریه‌ها یا توانیی اثبات قضیه‌های لازم حساب برای خودارجاعی را ندارند یا اگر دارند باید قبول کرد که استدلال‌ها در آن‌ها صدق نگهدار نیستند و همچنین باعث ایجاد تناقض‌های عجیبی در قسمت خالص حسابی خواهند شد بدین شکل که طرفدار این نظریه باید قبول کند دنباله‌ای از فرمول‌ها هم اثباتی برای یک فرمول است هم نیست. پس در مجموع می‌توان نتیجه گرفت راه حل‌های فراسازگار در مورد نظریه‌های صدق عرفی چندان قابل‌قبول نخواهند بود.

پیوست

قضیه: $\vdash_{BX} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{NBX} A$.

اثبات: باید نشان دهیم که تمام قضیه‌های BX در NBX اثبات می‌شوند و همچنین اگر مقدمه‌های قواعد BX قضیه‌ی NBX باشند باید نشان دهیم نتیجه‌های آن‌ها نیز قضیه‌ی NBX هستند. چک کردن این‌ها کار طولانی اما سرراستی است. برای عکس آن، یعنی اگر $\vdash_{NBX} A$ آنگاه $\vdash_{BX} A$ نیاز به ترجمه‌ای داریم که ساختارها را به فرمول‌هایی در سمت راست علامت استنتاج تبدیل کند.

$$j(A) = A$$
$$J(X,Y) = J(X) \wedge J(Y)$$
$$J(X;Y) = J(X) \circ J(Y)$$
$$J(X \vdash A) = J(X) \to A$$

توضیح: قواعد مربوط به ∘ عبارتند از :

$\dfrac{X \vdash A \quad Y \vdash B}{X;Y \vdash A \circ B}$	$\circ I$	$\dfrac{X \vdash A \circ B \quad Y(A;B) \vdash C}{Y(X) \vdash C}$	$\circ E$

همچنین در BX ادات ∘ چنین تعریف می‌شود:

$\dfrac{\vdash A \circ B \to C}{\vdash B \to (A \to C)}$	$\dfrac{\vdash B \to (A \to C)}{\vdash A \circ B \to C}$

چون در منطق NBX به قواعد ∘ احتیاج نداشتیم آن را معرفی نکردیم. در این جا نیز تنها برای اثبات قضیه‌های مربوط به ترجمه لازم خواهد شد[۱۹]. قضیه‌های زیر در اثبات به‌کار می‌آیند:

قضیه: $J(Y(X)) = J(Y(J(X)))$

اثبات: با استفاده از تعریف.

قضیه‌های زیر را با استفاده از استقراء بر روی ساختار X اثبات می‌شوند.

قضیه: اگر اثباتی در BX برای $A \rightarrow B$ وجود داشته باشد آنگاه اثباتی برای $J(X(A)) \rightarrow J(X(B))$ نیز وجود دارد[۲۰].

قضیه: $\vdash_{BX} J(X(A \vee B)) \rightarrow J(X(A)) \vee J(X(B))$

قضیه: $\vdash_{BX} J(X(\exists xA)) \rightarrow \exists x(J(X(A)))$ که x در $X(\exists xA)$ آزاد نیست.

آنگاه می‌توان نشان داد هر درخت اثبات در NBX قابل تبدیل به یک اثبات در BX است. بدین شکل که ترجمه‌ی اصل اینهمانی به صورت $A \rightarrow A$ در می‌آید و درادامه نشان می‌دهیم اگر چیزی با قاعده‌های NBX به دست آید ترجمه‌ی آن نیز با استفاده قواعد BX به‌دست می‌آید. فرض استقراء این خواهد بود که ترجمه‌ی هر فرمول در درخت اثبات با ارتفاع n قضیه‌ی BX است. آنگاه نشان می‌دهیم فرمول انتهایی درخت اثبات با طول $n + 1$ که از اعمال یکی از قواعد NBX به دست می‌آید نیز قضیه‌ی BX خواهد بود. روش اثبات بدین شکل است که نشان می‌دهیم اگر مقدمات قاعده‌های NBX قضیه‌ی BX باشند آنگاه نتیجه آن‌ها نیز قضیه BX خواهند بود.

پی‌نوشت‌ها

۱. منظور از محمول صدق عرفی تنها چیزی است که در این جا بیان شد. ادعا بر این نیست که این محمول کاملاً متناظر با محمول صدق در زبان طبیعی است یا تماماً شهود زبان طبیعی ما را در مورد صدق بیان می‌کند.

۲. تارسکی این قضیه را برای زبان نظریه‌ی کلاس (class theory) اثبات می‌کند که آن هم نظریه‌ای به اندازه کافی قوی است که لم قطری سازی (diagonal lemma) و قضیه نقطه ثابت در آن اثبات می‌شود. نگاه کنید به (Tarski, 1952: 247-251)

۳. هنگامی که گفته می‌شود نظریه‌ی $\mathcal{T}$ جمله‌ی A را بیان می‌کند (assert) به این معنی است که $\vdash_{\mathcal{T}} A$.

۴. نگاه کنید به (Mendelson, 2015)

۵. اگر به جای $T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow B$ عبارت $\neg T(\ulcorner A \urcorner)$ جانشین شده بود پارادوکس دروغگو بدست می‌آمد.

۶. در سیستم استنتاج طبیعی هر گاه یک فرمول را چند جا فرض می‌کنیم و با یک قاعده‌ی معرفی شرط همه‌ی آن‌ها را تخلیه می‌کنیم در حقیقت از ویژگی انقباض ساختاری استفاده می‌کنیم.

۷. گزینه‌ی از کار انداختن انقباض ساختاری در این مقاله مد نظر نیست.

۸. راه دیگر استفاده از نرمال فرم‌ها و قضیه‌های دمورگان است. بدین شکل که هر قضیه‌ی کلاسیک به صورت عطف تعدادی جمله در می‌آید که هر کدام شامل یک گزاره‌ی اتمی و نقیضش هستند. از آنجایی که در LP اصل طرد شق ثالث را برای تمام گزاره‌ها داریم می‌توان با استفاده از معرفی فصل به تمام آن جمله‌ها رسید و سپس آن‌ها را به هم عطف کرد. در مورد قضیه‌های LP هم واضح است که همگی در کلاسیک اثبات می‌شوند زیرا تمام قواعد سیستم استنتاج طبیعی آن در منطق کلاسیک نیز برقرار است.

۹. نگاه کنید به (Read, 1988)

۱۰. برای آشنایی‌ای به زبان ساده با سمانتیک این منطق و صورتبندی نظریه‌ی صدق عرفی در آن می‌توانید نگاه کنید به (Beall, 2009). همچنین باید تذکر داد که اصل موضوعه‌های $A8$ و $A9$ اضافه هستند و در سیستم BX منهای آن‌ها به عنوان قضیه اثبات می‌شوند. همچنین بیل و پریست هر دو قاعده‌ی $R5$ را ننوشته‌اند (اگر تمام اصول موضوعه به شکل بستار کلی نوشته شوند این قاعده لازم نخواهد بود و شاید پریست چنین چیزی را مد نظر داشته است). در این جا برای ساده‌تر شدن کار و ارجاع راحت‌تر به کارهای پریست و بیل از این صورتبندی استفاده شده است. برای صورتبندی بهتر می‌توانید نگاه کنید به (Brady, 2006)

۱۱. اگر محمول صدق عرفی را $BX\#$ آن اضافه کنیم و اجازه دهیم استقراء بر روی فرمول‌های داری T نیز عمل کند آن را $BXT\#$ می‌نامیم.

۱۲. نگاه کنید به (Priest, 2002) یا (Beall,2009).

۱۳. برای آشنایی با سمانتیک BX و یافتن مدل نقض برای معرفی شرطی در آن می‌توان به (Priest,2002) و یا (Priest & Sylvan,1991) مراجعه کرد.

۱۴. برای آشنایی با این دو مفهوم استنتاج در سیستم هیلبرتی نگاه کنید به (Kleene, 1967)

۱۵. در این جا قصد بر این نیست که چنین مفاهیمی توجیه شوند و صرفاً به عنوان یک ابزار به آن‌ها نگاه خواهد شد. برای اطلاعات بیشتر در مورد آن‌ها می‌توانید نگاه کنید به (Slaney,1990) و (Restall,1994) و (Restall,1999)

۱۶. هر چند می‌توان نشان داد $PA \vdash A \Rightarrow BX\# \vdash A \vee f$ اما به دلیل طولانی بودن اثبات در این جا آورده نمی‌شود.

۱۷. نگاه کنید به (Restall,1994:208-211)

۱۸. برای نگاه کردن به گزینه‌های دیگری که طرفداران فراسازگاری دارنـد نگـاه کنیـد بـه (Shapiro, 2002). هر چند آن گزینه‌ها تنها می‌توانند فرضیه‌های نجات بخش غیرقابل پذیرش باشند.

۱۹. در مورد این منطق خاص کـاربرد آن را چیـزی شـبیه بـه کـاربرد اعـداد مخـتلط در مسـائل مهندسـی درنظر بگیرید.

۲۰. در این قضیه‌ها به جای A باید $Y(A)$ قرار داده می‌شد که در این جا به خاطر کوتاه‌تر شدن اثبات‌ها از آن صرف نظر نظر شده است.

کتاب‌نامه

Beall, Jc & Murzi, Julien (2013). Two Flavors of Curry's Paradox. *Journal of Philosophy* 110 (3):143-165.

Brady, Ross (2006). *Universal Logic*. CSLI Publications.

Kleene, Stephen Cole (1967). *Mathematical Logic*. New York, NY, USA: Dover Publications.

Mendelson, Elliott (2015). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Van Nostrand.

Priest, G. and Sylvan, R., 1992. Simplified semantics for basic relevant logics. *Journal of Philosophical Logic*, pp.217-232.

Priest, G., 2002. Paraconsistent logic. In *Handbook of philosophical logic* (pp. 287-393). Springer, Dordrecht

Priest, Graham, Koji Tanaka, and Zach Weber, "Paraconsistent Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =

<https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/logic-paraconsistent/>.

Read, Stephen (1988). *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference*. Oxford: Wiley-Blackwell

Restall, G., 1994. *On logics without contraction* (Doctoral dissertation, University of Queensland).

Restall, Greg (1999). *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge.

Shapiro, S., 2002. Incompleteness and inconsistency. *Mind*, *111*(444), pp.817-832.

Slaney, J., 1990. A general logic. *Australasian Journal of Philosophy*, *68*(1), pp.74-88.

Tarski, Alfred (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford, Clarendon Press.