

Hajhosseini's Non-Truth-functional Logic

Asadollah Fallahi*

Abstract

Mortaza Hajhosseini in the second edition of his book *Two Non-Classical Logic Systems, A new Outlook on Elements of Logic* has introduced four non-classical logics: truth-functional, non-truth-functional, and combinations of the two, which are naturally extensions of the former two. In another article, we have examined Hajhosseini's truth-functional logic, and in this article, we will discuss the non-truth-functional logic and its extension. In this article, we will only deal with formal-mathematical objections, and we will leave philosophical and non-formal objections as well as related historical materials to another article. In addition to some common flaws between Hajhosseini's truth-functional and non-truth-functional logics, such as the vicious circle in the definition of the natural deduction system, the lack of an example for the condition of "normality of arguments" in semantics, incompleteness, and the inaccuracy of extra-problems, there are other flaws in the non-truth-functional logic. A formal problem is that many of the main rules in this system can be proven with the help of other main rules and thus are redundant. Another formal problem of the non-truth-functional logic is that it has a rule called "Hajhosseini's rule" which causes every propositional variable in this system to be a theorem and the whole system becomes trivial. The third objection is that some forms of the distributivity rule in the expansion of the non-truth-functional logic of this book reduce the whole system to the classical logic of Frege and Russell.

Keywords: Classical logic, relevance logic, truth-functional logic, non-truth-functional logic.

* Professor, Hikmat and Philosophy Research Institute of Iran, falahiy@yahoo.com

Date received: 2023/03/16, Date of acceptance: 2023/06/14



Copyright © 2010, IHCS (Institute for Humanities and Cultural Studies). This is an Open Access article. This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی

اسدالله فلاحی*

چکیده

مرتضی حاج حسینی در ویراست دوم کتاب خویش «طرحی نو از اصول و مبانی منطق» چهار منطق ناکلاسیک معرفی کرده است: ۱. نظام تابع ارزشی، ۲. نظام غیرتابع ارزشی، ۳ و ۴. ترکیب‌هایی از دو نظام نخست که طبیعتاً گسترش‌هایی از آن دو به شمار می‌آیند. در مقاله دیگری، نظام تابع ارزشی حاج حسینی را بررسی کرده‌ام و در این مقاله به نظام غیرتابع ارزشی و گسترش‌های آن خواهم پرداخت که در کتاب مطرح شده‌اند. در این مقاله، صرفاً به نقدهای صوری-ریاضی می‌پردازم و نقدهای فلسفی و غیرصوری و نیز مطالب تاریخی مرتبط را به مقاله دیگری خواهم سپرد. افزون بر برخی نقدهای مشترک میان نظام‌های تابع ارزشی و غیرتابع ارزشی حاج حسینی مانند دور در تعریف نظام استنتاج طبیعی، فقدان نظیر برای شرط «نرمال بودن برهان‌ها» در سمانتیک، عدم تمامیت، و نادرستی فراقضایا، نقدهای دیگری در نظام غیرتابع ارزشی وجود دارد. نخستین نقد اختصاصی این است که بسیاری از قاعده‌های اصلی در این نظام به کمک دیگر قواعد اصلی قابل اثبات و در نتیجه زائد هستند و این هرچند با کتاب‌های «آموزشی» مناسب دارد، اما مناسب کتاب‌های «پژوهشی» نیست. نقد اختصاصی دوم نظام غیرتابع ارزشی این است که قاعده‌ای دارد به نام «قاعده حاج حسینی» که سبب می‌شود تا هر متغیر گزاره‌ای در این نظام قضیه باشد و کل نظام بدیهی (trivial) گردد. نقد سوم اینکه با صرف نظر از قاعده حاج حسینی، برخی صور قاعده پخش‌پذیری در گسترش نظام غیرتابع ارزشی این کتاب، کل نظام را به منطق کلاسیک فرگه و راسل فرومی‌کاهد.

کلیدواژه‌ها: منطق کلاسیک، منطق ربط، نظام تابع ارزشی، نظام غیرتابع ارزشی.

* استاد، مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران، falahiy@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۵، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۴



Copyright © 2018, IHCS (Institute for Humanities and Cultural Studies). This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International, which permits others to download this work, share it with others and Adapt the material for any purpose.

۱. مقدمه

مرتضی حاج حسینی در سال‌های ۱۳۹۶ و ۱۴۰۱ دو ویرایش از کتابی با عنوان «طرحی نو از اصول و مبانی منطق و دو نظام منطقی پایه غیرکلاسیک، جلد اول: منطق پایه گزاره‌ها» را منتشر کرده است. او در هر دو ویرایش این کتاب دو منطق معرفی می‌کند: یکی برای ادات‌های تابع‌ارزشی (مانند استلزام مادی، عاطف و فاصل که به ترتیب با نمادهای \supset ، \wedge و \vee نشان داده می‌شوند) و دیگری برای ادات‌های غیرتابع‌ارزشی (مانند شرطی لزومی، انفصال عنادی و عطف مفهومی که به ترتیب با نمادهای \rightarrow ، $+$ و \circ بیان می‌شوند).

در مقاله دیگری، نظام تابع‌ارزشی ویرایش دوم کتاب را بررسی (فلاحی ۱۴۰۲) و در مقاله دیگری ملاحظاتی تاریخی درباره این ویرایش را طرح کرده‌ام (فلاحی ۱۴۰۲ ب). در این مقاله قصد دارم با معرفی اجمالی نظام غیرتابع‌ارزشی در ویرایش دوم، برخی نقدهای صوری آنها را بیان کنم به امید آنکه در ویرایش‌های بعدی مورد نظر نویسنده محترم کتاب قرار بگیرند. به جز موارد صریحا ذکر شده، همه ارجاع‌ها در ادامه به ویرایش دوم این کتاب است و من صرفاً به نوشتن شماره صفحه بسنده خواهم کرد.

۲. نظام غیرتابع‌ارزشی

این نظام که به ظاهر به منطق ربط بسیار نزدیک است تفاوت‌های اساسی با آن دارد و شاید مهم‌ترین تفاوت، چنان که در مقاله «نظام تابع‌ارزشی حاج حسینی» دیدیم، در تعریف استنتاج «درست» باشد (فلاحی ۱۴۰۲). اما در اینجا تفاوت‌های بسیار مهم‌تر دیگری نیز هست که باید مورد توجه قرار بگیرد.

۱.۲ زبان

زبان نحوی این نظام، سه دسته ادات منطقی دارد: (۱) ادات‌های تابع‌ارزشی ناقص، تناقض و صدق منطقی (که با نمادهای \sim ، \perp و \top بیان می‌شوند)؛ (۲) ادات‌های غیرتابع‌ارزشی استلزام ربطی و دوشروطی ربطی (که با نمادهای \rightarrow و \leftrightarrow بیان می‌شوند)؛ (۳) ادات‌هایی برای عاطف مفهومی (تلفیق یا *fusion*)، فاصل مفهومی (تفریق یا *fission*) و انفصال حقیقی عنادی (که به ترتیب با نمادهای \circ ، $+$ و \pm نشان داده می‌شوند). به نظر می‌رسد که همه این ادات‌ها به عنوان ادات‌های تعریف‌نشده معرفی شده‌اند (ص ۱۵۸) و از این رو، هر کدام باید اصول موضوعه یا

نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی (اسدالله فلاحی) ۱۰۷

قواعدی داشته باشند (ص ۲۲۶). مجموعه این اصول و قواعد در قالب دستگاه استنتاج طبیعی معرفی شده است.

۲.۲ نظام استنتاج طبیعی

نظام استنتاج طبیعی این منطق شامل دو اصل موضوع (امتناع اجتماع نقیضین و طرد شق ثالث به زبان مفهومی و غیر تابع‌ارزشی) و ده قاعده معرفی و حذف ادات‌ها است (صص ۱۵۹-۱۶۳) که در عمل بسیار بیشتر از ده قاعده به نظر می‌رسند (در مجموع، ۲۵ قاعده). نویسنده کتاب برخلاف نظام تابع‌ارزشی خود، در نظام غیرتابع‌ارزشی، از این پرهیز دارد که نام قواعد مربوط به ادات‌ها را «معرفی» و «حذف» بنامد (صص ۹۴، ۲۳۰)؛ علی‌رغم این، برای آشنایی هر چه بیش‌تر خوانندگان، عنوان‌های «معرفی» و «حذف» ادات‌ها را داخل پرانتز آورده‌ام. در ضمن، ترتیب قواعد در اینجا اندکی با ترتیب کتاب متفاوت است.

اصول:

امتناع اجتماع نقیضین $\sim(A \circ \sim A)$	طرد شق ثالث $A + \sim A$
---	--------------------------

قواعد:

قاعده ترکیب (الف) (معرفی انفصال حقیقی) $\frac{A + B}{\sim(A \circ B)}$ $A \pm B$	قاعده تحلیل (الف) (حذف انفصال حقیقی) $\frac{A \pm B}{A + B}$ $\sim(A \circ B)$
قاعده ترکیب (ب) (معرفی دوشروطی) $\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$ $A \leftrightarrow B$	قاعده تحلیل (ب) (حذف دوشروطی) $\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$ $B \rightarrow A$
قاعده ترکیب (پ) (معرفی و حذف تلفیق) $\frac{A \circ B}{B \rightarrow C}$ $A \circ C$	
$\frac{A}{B}$ $A \circ B$ معرفت تلفیق	قاعده حاج‌حسینی (معرفی تلفیق) $\frac{A \rightarrow B}{A \circ B}$
$\frac{A \rightarrow B}{\sim A + B}$ معرفت تفریق	حذف تفریق $\frac{\sim A + B}{A \rightarrow B}$

<p>قاعدهٔ ارسطو (عکس نقیض)</p> $\frac{A \leftrightarrow B}{\sim B \leftrightarrow \sim A} \quad \frac{\sim B \leftrightarrow \sim A}{A \leftrightarrow B}$	<p>قاعدهٔ ارسطو (عکس نقیض)</p> $\frac{A \rightarrow B}{\sim B \rightarrow \sim A} \quad \frac{\sim B \rightarrow \sim A}{A \rightarrow B}$
<p>قاعدهٔ ابن سینا (معرفی و حذف انفصال حقیقی)</p> $\frac{A \leftrightarrow B}{\sim A \pm B} \quad \frac{\sim A \pm B}{A \leftrightarrow B}$	<p>قاعدهٔ ابن سینا (معرفی و حذف تفریق)</p> $\frac{A \rightarrow B}{\sim A + B} \quad \frac{\sim A + B}{A \rightarrow B}$
<p>قاعدهٔ خونجی (دمورگان تلفیق و تفریق)</p> $\frac{\sim (A \circ B)}{\sim A + \sim B} \quad \frac{\sim A + \sim B}{\sim (A \circ B)}$	<p>قاعدهٔ خونجی (دمورگان تلفیق و تفریق)</p> $\frac{\sim (A + B)}{\sim A \circ \sim B} \quad \frac{\sim A \circ \sim B}{\sim (A + B)}$
<p>دلیل شرطی</p> $\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$	<p>وضع مقدم</p> $\frac{A \rightarrow B}{A} \quad B$
<p>برهان خلف (معرفی ناقض)</p> <p>اگر فرمول A را در سطری از برهان فرض نماییم و A خودش ناسازگار باشد یا دست کم با یکی از مقدمه‌های استدلال مجموعه‌ای نحوی ناسازگار تشکیل دهد، می‌توانیم $\sim A$ را در سطر بعدی نتیجه بگیریم.</p>	<p>برهان خلف (حذف ناقض)</p> <p>اگر فرمول $\sim A$ را در سطری از برهان فرض نماییم و A خودش ناسازگار باشد یا دست کم با یکی از مقدمه‌های استدلال مجموعه‌ای نحوی ناسازگار تشکیل دهد، می‌توانیم A را در سطر بعدی نتیجه بگیریم.</p>

مهم‌ترین تفاوت قاعدهٔ دلیل شرطی در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی با همین قاعده در نظام تابع‌ارزشی او در این است که شمارهٔ سطر فرض A باید در میان شماره‌فرض‌های سطر B باشد (ص ۱۶۳ بند ۲، ص ۲۳۱ بند ۱، ص ۲۵۰ سطر آخر). در برهان خلف نیز، شمارهٔ سطر فرض‌های A و $\sim A$ باید در میان شماره‌فرض‌های سطر تناقض به دست آمده باشد (ص ۱۶۴ بند ۳، ص ۲۳۱ بند ۲، ص ۲۵۱ سطر ۱۹).

۳.۲ نام‌گذاری‌های نامتعارف

به گمان من، نامیدن قاعده‌های مشهوری مانند «عکس نقیض»، «استلزام» و «دمورگان» به نام‌های بزرگانی مانند ارسطو، ابن‌سینا و خونجی جز سردرگم کردن مخاطب نتیجه‌ای ندارد. افزون بر این، مطابقت این نام‌ها با این قاعده‌ها به لحاظ تاریخی، علی‌رغم شواهد اندکی که نویسندهٔ کتاب ذکر کرده است (ص ۱۶۵)، مورد تردید بسیار است. اتفاقاً، در ویرایش نخست، قاعدهٔ ارسطو همان «عکس نقیض» نام‌گذاری شده بود (۱۳۹۶ ص ۱۲۹). به نظر من، هم‌چنین

بهرتر می‌بود نام‌های «استلزام مفهومی» و «دمورگان مفهومی» به جای نام‌های «ابن‌سینا» و «خونجی» به کار گرفته می‌شد.

۴.۲ قاعده برهان خلف

نویسنده کتاب قاعده‌های برهان خلف را بر خلاف دیگر قاعده‌ها صرفاً به زبان طبیعی بیان کرده است بدون آن که برای آن دلیلی ذکر کند. نوشتن قاعده‌ها به زبان طبیعی برای فهم بهتر بیان صوری آنها امری پسندیده و بسیار رایج است اما خودداری از نوشتن بیان صوری قاعده‌ها به نظر نگارنده این مقاله عجیب است.

از سوی دیگر، تعریف برهان خلف به «ناسازگاری»، تعریف «ناسازگاری» به «استنتاج»، و تعریف «استنتاج» به «برهان خلف» یک دور آشکار است. بر خلاف نظام تابع‌ارزشی که در آن امکان داشت «ناسازگاری» را بر حسب منطق کلاسیک تعریف کرد، در نظام غیرتابع‌ارزشی، معلوم نیست که «ناسازگاری» را باید بر حسب کدام منطق مستقل از تعریف «درستی» حاج‌حسینی تعریف نمود.

به نظر می‌رسد که به آسانی می‌شد این اشکالات را دور زد و دو قاعده برهان خلف را به سادگی به صورت زیر نوشت:

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B \circ \sim B}{\sim A}$	برهان خلف (معرفی ناقض)	$\frac{[\sim A] \quad \vdots \quad B \circ \sim B}{A}$	برهان خلف (حذف ناقض)
--	---------------------------	--	-------------------------

با این دو قاعده، به سادگی می‌توان قاعده‌های عکس نقیض (ارسطو) را اثبات کرد و نشان داد که این قاعده‌ها زائد هستند:

قاعده ارسطو (عکس نقیض)		قاعده ارسطو (عکس نقیض)	
$A \leftrightarrow B$	$\sim B \leftrightarrow \sim A$	$A \rightarrow B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
$\sim B \leftrightarrow \sim A$	$A \leftrightarrow B$	$\sim B \rightarrow \sim A$	$A \rightarrow B$

برهان:

1	1.	$A \rightarrow B$	فرض
2	2.	$\sim B$	فرض کمکی
3	3.	A	فرض کمکی
1, 3	4.	B	وضع مقدم ۱ و ۳

1, 2, 3	5.	$B \circ \sim B$	معرفی تلفیق ۲ و ۴
1, 2	6.	$\sim A$	برهان خلف ۳ و ۵
1	7.	$\sim B \rightarrow \sim A$	دلیل شرطی ۲ و ۶

دیگر صورت‌های قاعدهٔ عکس نقیض نیز به صورت مشابه قابل اثبات است و بنابراین، مناسب است همگی از فهرست قواعد اصلی حذف شوند.

۵.۲ کاهش پذیری تعداد قاعده‌ها

به نظر می‌رسد بسیار مناسب بود که تلفیق و تفریق به کمک ادات شرطی تعریف می‌شد و انفصال حقیقی نیز به کمک ادات دوشروطی تعریف می‌گشت و از تعداد قواعد اصلی کاسته می‌شد:

تعریف تلفیق (نقیض انفصال عنادی مانع جمع):	$(A \circ B) =_{df} \sim (A \rightarrow \sim B)$
تعریف تفریق (انفصال عنادی مانع خلو):	$(A + B) =_{df} (\sim A \rightarrow B)$
تعریف انفصال عنادی حقیقی:	$(A \pm B) =_{df} (A \leftrightarrow \sim B)$

با این تعریف‌ها، قاعده‌های تحلیل (الف)، ترکیب (الف)، حذف تفریق، معرفی تفریق و ابن‌سینا به آسانی قابل اثبات و در نتیجه قابل حذف از قواعد اصلی خواهند بود. افزون بر این، قاعده‌های معرفی تلفیق، ترکیب (پ) و خونجی (دمورگان تلفیق و تفریق) نیز همگی قابل اثبات و قابل حذف از فهرست قواعد اصلی خواهند بود. برهان این سه مورد را در زیر می‌آورم:

A	معرفی تلفیق
B	
$A \circ B$	

برهان:

1	1.	A	فرض
2	2.	B	فرض
3	3.	$A \rightarrow \sim B$	فرض کمکی
1, 3	4.	$\sim B$	وضع مقدم ۱ و ۳
1	5.	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim B$	دلیل شرطی ۳ و ۴
1	6.	$\sim \sim B \rightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$	عکس نقیض ۵
1	7.	$B \rightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$	نقض مضاعف ۶

نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی (اسدالله فلاحی) ۱۱۱

- 1, 2 8. $\sim(A \rightarrow \sim B)$ وضع مقدم ۲ و ۷
 1, 2 9. $A \circ B$ تعریف تلفیق ۸

$A \circ B$	(پ) (معرفی و حذف تلفیق)
$\frac{B \rightarrow C}{A \circ C}$	
$A \circ C$	

برهان:

- | | | | |
|---------|-----|---|-------------------|
| 1 | 1. | $A \circ B$ | فرض |
| 2 | 2. | $B \rightarrow C$ | فرض |
| 3 | 3. | $A \rightarrow \sim C$ | فرض کمکی |
| 3 | 4. | $\sim \sim C \rightarrow \sim A$ | عکس نقیض ۳ |
| 3 | 5. | $C \rightarrow \sim A$ | نقض مضاعف ۴ |
| 2, 3 | 6. | $B \rightarrow \sim A$ | قیاس شرطی ۲ و ۵ |
| 2, 3 | 7. | $\sim \sim B \rightarrow \sim A$ | نقض مضاعف ۶ |
| 2, 3 | 8. | $A \rightarrow \sim B$ | عکس نقیض ۷ |
| 1 | 9. | $\sim(A \rightarrow \sim B)$ | تعریف تلفیق ۱ |
| 1, 2, 3 | 10. | $(A \rightarrow \sim B) \circ \sim(A \rightarrow \sim B)$ | معرفی تلفیق ۸ و ۹ |
| 1, 2 | 11. | $\sim(A \rightarrow \sim C)$ | برهان خلف ۳ و ۱۰ |
| 1, 2 | 12. | $A \circ C$ | تعریف تلفیق ۱۱ |

قاعده خونجی		قاعده خونجی	
(دمورگان تلفیق و تقریق)		(دمورگان تلفیق و تقریق)	
$\frac{\sim(A \circ B)}{\sim A + \sim B}$	$\frac{\sim A + \sim B}{\sim(A \circ B)}$	$\frac{\sim(A + B)}{\sim A \circ \sim B}$	$\frac{\sim A \circ \sim B}{\sim(A + B)}$

یک مورد را اثبات می‌کنم:

برهان:

- | | | | |
|------|----|---|-------------------|
| 1 | 1. | $\sim A + \sim B$ | فرض |
| 2 | 2. | $A \circ B$ | فرض |
| 1 | 3. | $\sim \sim A \rightarrow \sim B$ | تعریف تقریق ۱ |
| 1 | 4. | $A \rightarrow \sim B$ | نقض مضاعف ۳ |
| 2 | 5. | $\sim(A \rightarrow \sim B)$ | تعریف تلفیق ۲ |
| 1, 2 | 6. | $(A \rightarrow \sim B) \circ \sim(A \rightarrow \sim B)$ | معرفی تلفیق ۴ و ۵ |

برهان خلف ۲ و ۶ $7. \sim (A \circ B)$ 1

دیگر موارد نیز به شیوه مشابه اثبات می شود.

۶.۲ تعریف «درستی»

درست مانند نظام تابع ارزشی، در نظام غیرتابع ارزشی نیز نویسنده کتاب هر برهانی را درست نمی داند و همان شرطهایی را که در منطق تابع ارزشی خود آورد در اینجا نیز ذکر می کند (ص ۱۶۸-۱۷۰). برای نمونه، هرچند استدلالهای زیر در نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی درست هستند:

$$\begin{aligned} P, Q &\vdash P \\ P, P \rightarrow Q &\vdash Q \\ P \rightarrow Q, Q \rightarrow R &\vdash P \rightarrow R \end{aligned}$$

اما استدلالهای زیر نمونه جانشین آنها نیستند (یا به تعبیر دقیق تر، نمونه جانشینهای نادرست آن هستند):

$$\begin{aligned} P, \sim P &\vdash P \\ P, P \rightarrow (Q \rightarrow Q) &\vdash Q \rightarrow Q \\ P \rightarrow Q, Q \rightarrow R &\vdash P \rightarrow P \end{aligned}$$

مشابه اشکالهایی که در مقاله «نظام تابع ارزشی حاج حسینی» مطرح کردم را می توان در اینجا تکرار کرد که برای پرهیز از طولانی شدن مقاله، از آنها درمی گذرم.

۷.۲ قاعده جایگشت

نویسنده کتاب در ص ۲۳۵ ویرایش دوم قاعده دوطرفه جایگشت را نادرست شمرده است بدون اینکه دلیل آن را بگوید:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)} \text{ جایگشت}$$

با شگفتی تمام می بینیم که این قاعده در نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی قابل اثبات و درست است:

برهان جایگشت:

1	1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	مقدمه
2	2. B	فرض کمکی

3	3.	A	فرض کمکی
1, 3	4.	$B \rightarrow C$	وضع مقدم ۱ و ۳
1, 2, 3	5.	C	وضع مقدم ۲ و ۴
1, 2	6.	$A \rightarrow C$	دلیل شرطی ۳ و ۵
1	7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	دلیل شرطی ۲ و ۶

عکس قاعده جایگشت از آنجا که نمونه‌جانشین قاعده جایگشت است، بنابراین، برهان یاد شده در بالا برهانی برای عکس آن نیز هست و از این رو، قاعده جایگشت قاعده‌ای دوسویه است.

با وجود این، باید توجه کرد که برهان بالا برای قاعده جایگشت «ترتیب نوشتن فرض‌ها» را مراعات نکرده است. نویسنده کتاب نوشته است:

ترتیب نوشتن فرض‌ها در این نظام از اهمیت خاصی برخوردار است. نخستین فرض کمکی، فرضی است که پیش از سایر فرض‌های کمکی در برهان مورد استفاده قرار می‌گیرد. دومین فرض کمکی، فرضی است که پس از فرض کمکی اول در برهان مورد استفاده قرار می‌گیرد و ... این ترتیب باید در نوشتن همه فرض‌های کمکی رعایت شود؛ در غیر این صورت، برهان نادرست ارزیابی می‌شود. در ضمن، برای حذف فرض‌های کمکی نیز باید از فرضی شروع کنیم که فرض کمکی دیگری در دامنه آن نباشد؛ یعنی، باید از آخرین فرض کمکی حذف نشده شروع نماییم، سپس به ترتیب سراغ فرض‌های کمکی حذف نشده پیشین برویم و در آخرین گام، اولین فرض کمکی حذف نشده را حذف کنیم؛ در غیر این صورت، برهان نادرست ارزیابی می‌شود. (ص ۱۶۴) (تأکیدها از من است).

بنا به این متن، ترتیب حذف فرض‌های کمکی باید معکوس ترتیب استفاده شدن آن فرض‌ها در برهان باشد.

شاید نویسنده کتاب بر پایه قانونی که درباره «ترتیب نگارش و حذف فرض‌های کمکی» بیان داشته است در اینجا بگوید که در برهان بالا برای قاعده جایگشت، فرض کمکی سطر ۳ پیش از فرض کمکی سطر ۲ به کار رفته است و بنابراین، باید پیش از آن نوشته می‌شد و پس از آن (به وسیله قاعده دلیل شرطی) حذف می‌شد اما در عمل پیش از آن حذف شده است.

برای رهایی از این دشواره، می توان نشان داد برهان دیگری برای جایگشت وجود دارد که «ترتیب نوشتن و حذف فرض های کمکی» را مراعات کرده باشد. یک نمونه نسبتاً ساده چنین است:

1	1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	مقدمه
2	2.	B	فرض کمکی
3	3.	$B \rightarrow C$	فرض کمکی
2,3	4.	C	وم ۲ و ۳
2	5.	$(B \rightarrow C) \rightarrow C$	دش ۳ و ۴
6	6.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	فرض کمکی
7	7.	A	فرض کمکی
6,7	8.	$B \rightarrow C$	وم ۶ و ۷
2,6,7	9.	C	وم ۲ و ۸
2,6	10.	$A \rightarrow C$	دش ۷ و ۹
2	11.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	دش ۶ و ۱۰
	12.	$B \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)]$	دش ۲ و ۱۱
13	13.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	فرض کمکی
1,13	14.	$A \rightarrow C$	وم ۱ و ۱۳
1	15.	$[(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$	دش ۱۳ و ۱۴
16	16.	B	فرض کمکی
16	17.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	وم ۱۲ و ۱۶
1,16	18.	$A \rightarrow C$	وم ۱۵ و ۱۷
1	19.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	دش ۱۶ و ۱۸

برخی منطق دانان ربط، برای جلوگیری از اثبات قاعده جایگشت، شماره فرض های سطرها را به جای اینکه مجموعه بگیرند دنباله می گیرند. با این کار، برهان بالا دیگر برهان نخواهد بود. لازمه دنباله گرفتن شماره فرض ها این است که از منطق هایی به مراتب ضعیف تر از منطق ربط R مانند منطق های E، T، B و حتی منطق های ضعیف تر استفاده شود. اما حاج حسینی هیچ اعتمادی به منطق های ربط ندارد و نمی تواند از دست آوردهای آنان استفاده کند.

۸.۲ قاعده صدور

نویسنده کتاب در ص ۲۳۵ ویرایش دوم هم‌چنین قاعده دوطرفه صدور را نادرست شمرده است بدون اینکه دلیل آن را بگوید:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \circ B) \rightarrow C} \text{ صدور}$$

با شگفتی تمام می‌بینیم که این قاعده نیز در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی قابل اثبات و درست است. هنگامی که وجود برهان برای جایگشت در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی مبرهن شد، می‌توانیم برای صدور نیز برهان ساده‌ای بیاوریم:

برهان صدور:

- | | | | |
|---|----|---|---------------|
| 1 | 1. | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | ف |
| 1 | 2. | $A \rightarrow (\sim C \rightarrow \sim B)$ | عکس نقیض ۱ |
| 1 | 3. | $\sim C \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$ | جایگشت ۲ |
| 1 | 4. | $\sim (A \rightarrow \sim B) \rightarrow C$ | عکس نقیض ۳ |
| 1 | 5. | $(A \circ B) \rightarrow C$ | تعریف تلفیق ۴ |

از آنجا که در برهان صدور، تنها از قاعده‌های دوسویه استفاده شده است، آشکار می‌شود که قاعده صدور هم دوسویه است.

۹.۲ تعریف‌پذیری ادات دوشروطی

با اثبات قاعده صدور، نویسنده کتاب می‌توانست دوشروطی را به کمک شرطی به صورت زیر:

$$(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A) \quad \text{تعریف دوشروطی:}$$

تعریف و به کمک آن، قاعده‌های مربوطه را اثبات کند. برای نمونه، دو قاعده زیر را اثبات می‌کنم:

$\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$	قاعده ترکیب (معرفی دوشروطی)	$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$	قاعده تحلیل (حذف دوشروطی)
$\frac{B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$		$\frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$	

برهان «معرفی دوشروطی»:

- | | | | |
|-----|----|---|--------------------|
| 1 | 1. | $A \rightarrow B$ | ف |
| 2 | 2. | $B \rightarrow A$ | ف |
| 1,2 | 3. | $(A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)$ | م ^۱ و ۲ |

تعریف \leftrightarrow ۳ $A \leftrightarrow B$ 4, 1, 2

برهان «حذف دوشروطی»:

1	1.	$A \leftrightarrow B$	ف
1	2.	$(A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)$	تعریف \leftrightarrow ۱
3	3.	$A \rightarrow B$	ف
4	4.	$B \rightarrow A$	ف
3, 4	5.	$A \rightarrow A$	قیاس شرطی ۳ و ۴
3, 4	6.	$A \rightarrow B$	قیاس شرطی ۳ و ۵
3, 4	7.	$B \rightarrow A$	قیاس شرطی ۴ و ۵
3	8.	$(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	دلیل شرطی ۴ و ۶
3	9.	$(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$	دلیل شرطی ۴ و ۷
	10.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$	دلیل شرطی ۳ و ۸
	11.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A))$	دلیل شرطی ۳ و ۹
	12.	$((A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	صدور ۱۰
	13.	$((A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$	صدور ۱۱
1	14.	$A \rightarrow B$	وضع مقدم ۲ و ۱۲
1	15.	$B \rightarrow A$	وضع مقدم ۲ و ۱۳

البته نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی سطر پنجم برهان اخیر را نمی پذیرد چون بنا به شرایط «درستی» برهان، سطر پنجم یک قضیه منطقی را بر دو غیر قضیه (یعنی بر سطرهای سوم و چهارم) استوار ساخته است. مشابه همین مسئله در سطر نهم رخ داده است. هرچند به نظر من، ابتدای قضیه به غیر قضیه هیچ ایرادی ندارد و شرطهای موردی و تصنعی (*ad hoc*) نویسنده کتاب کفایت لازم برای پذیرش ندارند؛ اما قرار است که در این مقاله، وارد مباحث فلسفی نشوم. ناگزیر بحث را به صورت کاملاً صوری پیش می برم. برای رفع مشکل سطرهای پنجم و نهم، برهان دیگری برای سطرهای دوازدهم و سیزدهم می آورم که دچار نقض شرایط و قیود حاج حسینی نباشند:

1	1.	$A \rightarrow B$	ف
2	2.	$A \rightarrow B$	ف
3	3.	$B \rightarrow A$	ف
4	4.	A	ف
1, 4	5.	B	وضع مقدم ۱ و ۴

1, 3, 4	6.	A	وضع مقدم ۳ و ۵
1, 2, 3, 4	7.	B	وضع مقدم ۲ و ۶
1, 2, 3	8.	$A \rightarrow B$	دلیل شرطی ۴ و ۷
1, 2	9.	$(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	دلیل شرطی ۳ و ۸
1	10.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$	دلیل شرطی ۲ و ۹
1	11.	$(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	وضع مقدم ۱ و ۱۰
	12.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$	دلیل شرطی ۱ و ۱۱
	13.	$((A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	صدور ۱۲
	14.	$((B \rightarrow A) \circ (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow A)$	نمونه جانشین ۱۳
	15.	$((A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$	جابجایی تلفیق ۱۴

چنان که دیده می‌شود، دو بار فرض کردن فرمول $A \rightarrow B$ در سطرهای اول و دوم به ما اجازه داده است که بتوانیم استدلال را بدون دچار شدن به نقض قیده‌های حاج‌حسینی پیش ببریم. البته می‌توان به صورت موردی و تصنعی (*ad hoc*) دو بار فرض کردن یک فرمول (در سطرهای ۱ و ۲) را ممنوع اعلام کرد و خود را به زحمت یافتن برهانی دیگر انداخت، اما چنین قیدها و راه‌حل‌های ناکارآمد، از دیدگاه منطقی صرف، چندان پسندیده نیستند.

توجه کنیم که شرط نرمال بودن «دگ پراویتز» که حاج‌حسینی در ویرایش دوم (صص ۱۸، ۵۱، ۱۱۱، ۱۱۵، ۱۱۸، ۱۲۰، ۱۴۰، ۲۷۰) به صورت موردی و تصنعی افزوده در اینجا نقض نشده است؛ قاعده حذف شرطی (وضع مقدم) در سطر ۱۱ پس از معرفی شرطی (دلیل شرطی) در سطر ۱۰ سبب «کاستن» از تعداد فرض‌ها شده است (و نه سبب «افزودن» تعداد فرض‌ها) و این با شرط «نرمال بودن» دگ پراویتز (صص ۱۸ و ۱۴۲) تعارضی ندارد. از سوی دیگر، در سطر ۱ که فرض سطرهای ۱۰ و ۱۱ است ادات شرطی وجود دارد و بنابراین، کاربرد وضع مقدم پس از دلیل شرطی در این دو سطر از مفهومی خارج از مفاهیم به کار گرفته شده در فرض‌های مربوطه استفاده نکرده است. البته چنان که گفتیم افزودن شرط نرمال بودن یک شگرد موردی و تصنعی است و می‌توان شگردهای موردی و تصنعی دیگری افزود مانند اینکه کاربرد قاعده حذف یک ادات پس از معرفی آن ادات حتی نباید موجب «کاستن» از تعداد فرض‌ها شود.

اگر تعریف دوشروطی به کمک شرطی را بپذیریم، تعریف‌های زیر را نیز برای انفصال حقیقی عنادی می‌توانیم بپذیریم:

$(A \pm B) =_{df} (A \rightarrow \sim B) \circ (\sim B \rightarrow A)$: تعریف انفصال حقیقی
$(A \pm B) =_{df} (A + B) \circ \sim (A \circ B)$: تعریف انفصال حقیقی

با وجود این، نویسنده تصریح کرده است که ادات‌های دوشروطی و انفصال حقیقی در نظام غیرتابع‌ارزشی غیر قابل تعریف هستند و باید برای آنها قواعد جداگانه ذکر کرد (ص ۲۲۶).
 با تعریف دوشروطی، قاعده‌های تحلیل (ب) و ترکیب (ب) نیز از فهرست قواعد اصلی حذف می‌شوند و تنها قاعده‌های اصلی که باقی می‌مانند عبارت خواهند بود از چهار قاعده وضع مقدم، دلیل شرطی، برهان خلف و قاعده حاج‌حسینی. این قاعده‌ها برابر پاره استلزامی - نقضی منطق ربط R (یعنی R_{\sim}) به همراه قاعده بوئیوس (نام دیگر قاعده حاج‌حسینی) خواهند بود. (شاید بتوان گفت نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی همان «پاره R_{\sim} به همراه قاعده بوئیوس» است که شرط‌های جدید «درستی» حاج‌حسینی به آنها اعمال شده است).

کم بودن ادات‌های اصلی و کم بودن تعداد قاعده‌ها برای مقاله‌ها و کتاب‌های پژوهشی امتیاز به شمار می‌آید به دو دلیل: یکی اینکه خوانندگان این آثار به سادگی بر محتوای نوآورانه آنها متمرکز می‌شوند و بیشترین بهره را می‌برند و دیگر اینکه اثبات فراقضایا (مانند سازگاری، صحت، تمامیت، فشردگی، تصمیم‌پذیری، جازمیت و غیره) آسان می‌شود. البته این حسن و امتیاز می‌تواند برای کتاب‌های آموزشی و درسی یک عیب یا نقص به شمار آید زیرا معمولاً نوآموزان با تفصیل بیشتر هم‌نوا ترند و بیشتر می‌آموزند.

۱۰.۲ پیامدهای قاعده حاج‌حسینی

در بخش «نظام استنتاج طبیعی» دیدیم که نویسنده کتاب در میان قواعد استنتاج قاعده زیر را معرفی کرده است:

$\frac{A \rightarrow B}{A \circ B}$ قاعده حاج‌حسینی (معرفی دوم تلفیق)

نویسنده کتاب درباره این قاعده نوشته است:

یکی از قاعده‌ها نیز که به نظر می‌رسد می‌تواند در حل برخی از مسائل بحث‌برانگیز در قلمرو شرطی‌های خلاف واقع به فیلسوفان علم مدد رساند و به چالش‌ها در این زمینه خاتمه دهد، ابداع نگارنده است (قاعده حاج‌حسینی) که برای اولین بار مطرح می‌شود. (ص ۲۷۸ بند ۳).

این قاعده، بنا به تعریف تلفیق، در حقیقت همان تز معروف بوئتیوس و اساس منطق‌های پیوندی (Connexive Logics) است و از این رو، قاعده جدیدی نیست:

$$\boxed{(A \rightarrow B) \rightarrow \sim(A \rightarrow \sim B) \text{ تز بوئتیوس}}$$

نویسنده کتاب اتفاقاً یک جا به منطق‌های پیوندی، رساله دکتری ای. جی. نلسون (۱۹۰۰-۱۹۸۸) در سال ۱۹۲۹، رد تلویحی این دیدگاه از سوی سی. آی. لوئیس (۱۸۸۳-۱۹۶۴) در سال ۱۹۵۱ و یک مقاله در سال ۲۰۱۹ درباره رساله نلسون و کتاب لوئیس ارجاع می‌دهد (صص ۱۶۵-۱۶۶) بدون اینکه به ادبیات گسترده در این زمینه از دهه ۱۹۶۰ تا کنون اشاره‌ای کند. او هم‌چنین بی‌راه نمی‌داند که اسم این قاعده «نلسون-حاج‌حسینی» نامیده شود درحالی که این قاعده نام بسیار معروف «تز بوئتیوس» را دارد و نامیدن آن به اسم افرادی که پس از ۱۶ قرن آمده‌اند چندان وجهی ندارد.

اما، در هر صورت، حضور این قاعده یا تز در نظام غیرتابع‌ارزشی نویسنده کتاب نتایج شگفتی در پی دارد که کل نظام را بی‌هوده و بدیهی (*trivial*) می‌سازد زیرا این قاعده در این نظام هر متغیر گزاره‌ای را به قضیه بدل می‌سازد. برای اثبات این ادعا، نخست برخی صورت‌های هم‌ارز اما صرفاً استلزامی این قاعده را بیان می‌کنم:

$$\boxed{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \rightarrow B) \rightarrow C} \text{ قاعده حاج‌حسینی (ب) (شرکت‌پذیری شرطی)}}$$

برهان:

1	1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	مقدمه
	2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \circ B)$	اصل حاج‌حسینی
1	3.	$(A \circ B) \rightarrow C$	صدور ۱
1	4.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	تعدی شرطی ۲ و ۳

برهان اصل حاج‌حسینی به کمک «شرکت‌پذیری شرطی»:

1	1.	A	ف
2	2.	B	ف
1,2	3.	$A \circ B$	معرفی تلفیق ۱ و ۲
1	4.	$B \rightarrow A \circ B$	دلیل شرطی ۲ و ۳
	5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A \circ B)$	دلیل شرطی ۱ و ۴
	6.	$(A \rightarrow B) \rightarrow A \circ B$	شرکت‌پذیری شرطی ۵

برهانی دیگر:

1	1.	A	ف
2	2.	$A \rightarrow \sim B$	ف
1,2	3.	$\sim B$	وضع مقدم ۱ و ۲
1	4.	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim B$	دلیل شرطی ۲ و ۳
	5.	$A \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim B)$	دلیل شرطی ۱ و ۴
	6.	$A \rightarrow (B \rightarrow \sim (A \rightarrow \sim B))$	عکس نقیض ۵
	7.	$A \rightarrow (B \rightarrow A \circ B)$	تعریف تلفیق ۶
	8.	$(A \rightarrow B) \rightarrow A \circ B$	شرکت پذیری شرطی ۷

$\frac{A \rightarrow (A \rightarrow B)}{B}$	قاعده حاج حسینی (ج) (حذف مقدم مکرر)
---	-------------------------------------

برهان:

1	1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	مقدمه
1	2.	$(A \rightarrow A) \rightarrow B$	شرکت پذیری شرطی ۱
	3.	$A \rightarrow A$	معرفی قضیه
1	4.	B	وضع مقدم ۲ و ۳

برهان اصل حاج حسینی به کمک «حذف مقدم مکرر»:

1	1.	A	ف
2	2.	B	ف
1,2	3.	$A \circ B$	معرفی تلفیق ۱ و ۲
1	4.	$B \rightarrow A \circ B$	دلیل شرطی ۲ و ۳
	5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A \circ B)$	دلیل شرطی ۱ و ۴
	6.	$A \rightarrow (A \rightarrow A \circ A)$	نمونه جانشین ۵
	7.	$A \circ A$	حذف مقدم مکرر ۶
	8.	$A \rightarrow B$	مقدمه
	9.	$A \circ B$	قاعده ترکیب (پ) ۷ و ۸

اثبات هر متغیر گزاره‌ای:

1	1.	$[(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow A$	ف
2	2.	$[(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow A$	ف
3	3.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	ف
4	4.	A	ف

نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی (اسدالله فلاحی) ۱۲۱

3, 4	5.	$A \rightarrow B$	وم ۳ و ۴
3, 4	6.	B	وم ۴ و ۵
3	7.	$A \rightarrow B$	دش ۴ و ۶
	8.	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	دش ۳ و ۷
2	9.	A	وم ۲ و ۸
10	10.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	ف
2, 10	11.	$A \rightarrow B$	وم ۹ و ۱۰
2	12.	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	دش ۱۰ و ۱۱
1, 2	13.	A	وم ۱ و ۱۲
1	14.	$\{[(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow A\} \rightarrow A$	دش ۲ و ۱۳
	15.	$\{[(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow A\} \rightarrow \{[(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow A\}$	دش ۱ و ۱۴
	16.	A	حذف مقدم مکرر ۱۵

به گمان من، اثبات قضیه بودن هر متغیر گزاره‌ای در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی نشان می‌دهد که افزودن قاعده حاج‌حسینی بدون اعمال تغییرات لازم در نظام غیرتابع‌ارزشی نتایج بسیار غیر قابل قبولی دارد و افزودن این قاعده نیازمند اعمال ظرافت‌های بیشتری است. هم‌چنین، آشکار می‌شود که برهان‌های کتاب برای فراقضیه‌های صحت و تمامیت نیازمند بازیابی است که ورود به آنها و نشان دادن جزئیات مسئله خود نوشتار دیگری را می‌طلبد. به نظر می‌رسد که در اثبات‌های بالا، کاربرد قاعده «صدور» بسیار مهم است و این قاعده نیز به کمک قاعده «جایگشت» اثبات شده بود. نویسنده کتاب هر دو قاعده «صدور» و «جایگشت» را نادرست اعلام کرده بود بدون اینکه دلیل آن را بگوید. استدلال‌های بالا نشان می‌دهد که ذکر دلیل نادرستی این دو قاعده بسیار مهم است و بدون ذکر آن، خواننده حق دارد که نظام حاصل را بدیهی (trivial) بداند.

۳. گسترش نظام غیرتابع‌ارزشی

نویسنده کتاب در فصل هشتم، به ترکیب نظام‌های تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی خود می‌پردازد. در آغاز قاعده‌های معرفی و حذف عاطف (تابع‌ارزشی) و قاعده‌های معرفی و حذف فاصل (تابع‌ارزشی) را به همراه قاعده‌های پخش‌پذیری زیر به نظام غیرتابع‌ارزشی خود می‌افزاید:

پخش پذیری		
$A \circ (B \vee C) \dashv\vdash (A \circ B) \vee (A \circ C)$	نوع اول	پخش مفهومی بر مصداقی
$A + (B \wedge C) \dashv\vdash (A + B) \wedge (A + C)$	نوع دوم	
$A \wedge (B + C) \dashv\vdash (A \wedge B) + (A \wedge C)$	نوع سوم	پخش مصداقی بر مفهومی
$A \vee (B \circ C) \dashv\vdash (A \vee B) \circ (A \vee C)$	نوع چهارم	

و حاصل را «گسترش نظام غیرتابع ارزشی» می نامد (صص ۲۶۶-۲۶۷).

۱.۳ پیامدهای قاعدهای پخش پذیری حاج حسینی

از چهار قاعده پخش پذیری که حاج حسینی برای گسترش نظام غیرتابع ارزشی خود پیش نهاده است، دو قاعده اول و دوم در منطق ربط قابل اثبات است بر خلاف دو قاعده سوم و چهارم که در منطق ربط اثبات نمی شوند. نشان می دهیم که افزودن دو قاعده سوم و چهارم به نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی نتایج ناپذیرفتنی دارند و عملاً نظام را به منطق کلاسیک فرومی کاهند که مقبول نظر حاج حسینی نیست. برای این مسئله، نشان می دهیم که پارادوکس مثبت از لوازم افزودن دو قاعده پخش پذیری اخیر به نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی است:

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

برهان:

1	1.	$A \circ B$	ف
1	2.	$(A \circ A) \vee (A \circ B) \vee (\sim B \circ A) \vee (\sim B \circ B)$	معرفی فاصل ۱
1	3.	$(A \circ (A \vee B)) \vee (\sim B \circ (A \vee B))$	پخش پذیری نوع اول ۲
1	4.	$((A \vee B) \circ A) \vee ((A \vee B) \circ \sim B)$	جابجایی ۳
1	5.	$(A \vee B) \circ (A \vee \sim B)$	پخش پذیری نوع اول ۴
1	6.	$A \vee (B \circ \sim B)$	پخش پذیری نوع چهارم ۵
	7.	$\sim (B \circ \sim B)$	اصل موضوع
1	8.	A	قیاس انفصالی ۶ و ۷
	9.	$(A \circ B) \rightarrow A$	دلیل شرطی ۱ و ۹
	10.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	صدور ۹

این نشان می دهد که پخش پذیری های نوع اول و چهارم باعث می شوند گسترش نظام غیرتابع ارزشی حاج حسینی به منطق کلاسیک فروبکاهد. اگر کسی با منطق ربط اندرسون و

نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی (اسدالله فلاحی) ۱۲۳

بلنپ که پخش‌پذیری نوع اول را می‌پذیرد همدلی داشته باشد ناگزیر پخش‌پذیری نوع چهارم را مردود خواهد شمرد. اما از آنجا که حاج‌حسینی با منطق ربط اندرسون و بلنپ همدلی ندارد، نمی‌دانیم که او کدام یک از این دو پخش‌پذیری را مقصر می‌شمارد.

شاید گمان شود که در برهان بالا، بتوان کاربرد قاعده «صدور» در سطر آخر را مقصر به‌شمار آورد. نشان می‌دهم که می‌توان برهان را بدون قاعده صدور نیز به پایان رساند. از این‌رو، سطر پایانی را با دنباله زیر جای‌گزین می‌کنم:

- | | | |
|-----|---|-----------------|
| 10. | $\sim(A \rightarrow \sim B) \rightarrow A$ | تعریف تلفیق ۹ |
| 11. | $\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$ | عکس نقیض ۱۰ |
| 12. | $\sim \sim A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$ | نمونه‌جانشین ۱۱ |
| 13. | $A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$ | نقض مضاعف ۱۲ |
| 14. | $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ | عکس نقیض ۱۳ |

حتی می‌توان بدون پخش‌پذیری نوع اول هم استدلال را پیش برد و نشان داد که پخش‌پذیری نوع چهارم مقصر اصلی است:

- | | | | |
|------|-----|------------------------------------|-----------------------|
| 1 | 1. | A | ف |
| | 2. | $B + \sim B$ | اصل موضوع |
| 1 | 3. | $A \wedge (B + \sim B)$ | معرفی عاطف ۱ و ۲ |
| 1 | 4. | $(A \wedge B) + (A \wedge \sim B)$ | پخش‌پذیری نوع چهارم ۵ |
| 5 | 5. | B | فرض |
| 5 | 6. | $\sim A \vee B$ | معرفی فاصل ۵ |
| 5 | 7. | $\sim A \vee \sim \sim B$ | نقض مضاعف ۶ |
| 5 | 8. | $\sim (A \wedge \sim B)$ | دمورگان ۷ |
| 1, 5 | 9. | $A \wedge B$ | قیاس انفصالی ۴ و ۸ |
| 1, 5 | 10. | A | حذف عاطف ۹ |
| 1 | 11. | $B \rightarrow A$ | دلیل شرطی ۵ و ۱۰ |
| | 12. | $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ | دلیل شرطی ۱ و ۱۱ |

این برهان نشان می‌دهد که پخش‌پذیری نوع چهارم، نظام را به منطق کلاسیک فرومی‌کاهد. از آنجا که پخش‌پذیری نوع سوم هم‌ارز نوع چهارم است، همین ایراد به نوع سوم هم وارد می‌شود.

۲.۳ پیامدهای ترکیب قاعده حاج حسینی با قاعده‌های عاطف و فاصل

دیدیم که نویسنده کتاب در میان قواعد استنتاج قاعده زیر را معرفی کرده است:

$$\frac{A \rightarrow B}{A \circ B} \quad \text{قاعده حاج حسینی (معرفی دوم تلفیق)}$$

و دیدیم که حضور این قاعده یا تز در نظام غیرتابع‌ارزشی نویسنده کتاب نتایج شگفتی‌دربی دارد که کل نظام را بی‌هوده و بدیهی (*trivial*) می‌سازد زیرا این قاعده در این نظام هر متغیر گزاره‌ای را به قضیه بدل می‌سازد. اکنون می‌خواهم نشان دهم که این پدیده در گسترش این نظام به شکلی دیگر و بلکه ساده‌تر رخ می‌دهد. نخست، اثبات می‌کنم که هر دو گزاره دلخواه در این گسترش سازگار هستند:

$$\vdash A \circ B$$

برهان:

1. $(A \wedge B) \rightarrow A$ معرفیه حذف عاطف
2. $(A \wedge B) \rightarrow B$ معرفیه حذف عاطف
3. $(A \wedge B) \circ B$ حاج حسینی ۲
4. $A \circ B$ قاعده ترکیب (پ) ۱ و ۳

اکنون، به کمک این قضیه نشان می‌دهم که هر متغیر گزاره‌ای قضیه است:

$$\vdash A$$

برهان:

1. $A \circ B$ معرفیه قضیه
2. $(B \rightarrow A) \circ B$ نمونه‌جانشین ۱
3. $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ معرفیه قضیه
4. $((B \rightarrow A) \circ B) \rightarrow A$ صدور ۳
5. A وضع مقدم ۲ و ۴

این دو برهان را می‌توان در یک برهان به صورت زیر ادغام کرد:

$$\vdash A$$

برهان:

1. $((B \rightarrow A) \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ معرفیه حذف عاطف
2. $((B \rightarrow A) \wedge B) \rightarrow B$ معرفیه حذف عاطف
3. $((B \rightarrow A) \wedge B) \circ B$ حاج حسینی ۲

- | | |
|--|-----------------------|
| 4. $(B \rightarrow A) \circ B$ | قاعده ترکیب (پ) ۱ و ۳ |
| 5. $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ | معرفی قضیه |
| 6. $((B \rightarrow A) \circ B) \rightarrow A$ | صدور ۵ |
| 7. A | وضع مقدم ۴ و ۶ |

در این دو برهان از قاعده صدور استفاده کردم که حاج‌حسینی آن را غیر قابل اثبات اعلام کرده بود؛ اما پیش‌تر نشان دادم که قاعده صدور را علی‌رغم نظر نویسنده کتاب می‌توان در نظام غیرتابع‌ارزشی کتاب اثبات کرد. با همه اینها، می‌توانیم هر متغیر گزاره‌ای را بدون قاعده صدور و حتی بدون قاعده ترکیب (پ) نیز اثبات کنیم. کافی است صورت‌برهان زیر را اثبات کنیم و به کمک آن از سطر ۳ در برهان اخیر مستقیماً به سطر ۷ برسیم:

$$\frac{((B \rightarrow A) \wedge B) \circ B}{A}$$

یا معادل آن:

$$\frac{\sim A}{((B \rightarrow A) \wedge B) \rightarrow \sim B}$$

برهان:

- | | |
|--|-----------------|
| 1. $\sim A$ | مقدمه |
| 2. $(B \rightarrow A) \wedge B$ | فرض کمکی |
| 3. $B \rightarrow A$ | حذف عاطف ۲ |
| 4. $\sim A \rightarrow \sim B$ | عکس نقیض ۳ |
| 5. $\sim B$ | وضع مقدم ۱ و ۴ |
| 6. $((B \rightarrow A) \wedge B) \rightarrow \sim B$ | دلیل شرطی ۲ و ۵ |

توجه کنیم که در همه برهان‌های بالا، همه سطرها قضیه هستند و هیچ فرضی و بنابراین، هیچ شماره فرضی در برهان‌ها وجود ندارد. این نشان می‌دهد که ثابت کرده‌ام که در گسترش نظام غیرتابع‌ارزشی، هر متغیر گزاره‌ای قضیه است.

۴. نتیجه‌گیری

نشان دادم که در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی تعداد ادات‌ها و قاعده‌ها بسیار زیاد است و می‌توان آنها را به تعداد نسبتاً اندکی فروکاست.

هم‌چنین نشان دادم که قاعده «حاج‌حسینی» در این نظام سبب اثبات سازگاری میان هردو گزاره و بلکه بالاتر سبب اثبات هر متغیر گزاره‌ای می‌شود. در برهان این مسئله، از قاعده‌های جایگشت و صدور استفاده کردم که نویسنده کتاب به نادرستی آنها اشاره کرده بود بدون اینکه دلیل آن را بگوید. برهان‌های ما نشان می‌دهد که بیان دلیل نادرستی این برهان‌ها در کتاب از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است.

حاج‌حسینی برای ابطال قاعده جایگشت و صدور، شرط ترتیب نوشتن و حذف فرمول‌های کمکی را مطرح کرده است اما نشان دادم که این شرط نمی‌تواند همه برهان‌های جایگشت و صدور را ابطال کند. برای ابطال این دو قاعده، باید مانند منطق ربط، مقدمات را، به جای مجموعه، دنباله در نظر گرفت و رابطه آنها را، به جای عطف مصداقی، باید عطف مفهومی لحاظ کرد.

هم‌چنین نشان دادم که در گسترش نظام غیرتابع‌ارزشی، قاعده‌های پخش‌پذیری که نویسنده کتاب معرفی می‌کند، حتی در غیاب قاعده حاج‌حسینی و قاعده‌های جایگشت و صدور، سبب می‌شود که پارادوکس مثبت اثبات شود و کل نظام به منطق کلاسیک فروبکاهد.

سپاس‌گزاری

پیش‌نویس‌هایی از این مقاله را همکاران محترم، داود حسینی و علیرضا دارابی، خواندند و نکات ارزش‌مندی را پیش‌نهادند که از این بابت از آنها سپاس‌گزارم. آشکار است که مسؤولیت همه خطاهای احتمالی مقاله بر عهده نگارنده است.

کتاب‌نامه

- حاج‌حسینی، مرتضی، (۱۳۹۶)، طرحی نو از اصول و مبانی منطق و دو نظام منطقی پایه غیرکلاسیک، جلد اول: منطق پایه گزاره‌ها، اصفهان، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- حاج‌حسینی، مرتضی، (۱۴۰۱)، طرحی نو از اصول و مبانی منطق با معرفی دو نظام منطقی پایه غیرکلاسیک، جلد اول: منطق پایه گزاره‌ها، اصفهان، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲)، «نظام تابع‌ارزشی حاج‌حسینی»، آینه معرفت ۲۳، ش. ۱، صص ۲۱-۴۳.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲)، «ملاحظات تاریخی درباره نظام‌های منطقی معرفی شده توسط حاج‌حسینی»، شناخت ۲۲، ش. ۱، صص ۱۵۱-۱۷۰.