Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol.14, No. 1, Spring and Summer 2023, 87-102
Doi: 10.30465/lsj.2023.45466.1439

Binary Normal Modal Logic

Fatemeh Shirmohammadzadeh Maleki*

Abstract

In this article, first we define a Kripke semantics for normal modal Logic with a binary operator and we introduce a system $\boldsymbol{K^2}$ which is sound and complete for this semantics. Then, we will introduce two translations and show that binary normal modal logic $\boldsymbol{K^2}$, and unary normal modal logic $\boldsymbol{K}$, i.e. modal logic with one binary operator, are very closely related by these two translations. We call a translation a faithful interpretation if provability is preserved in both directions. So, with this terminology we will show that these two translations are faithful interpretation of $\boldsymbol{K}$ into $\boldsymbol{K^2}$ and vice versa. A logic extending $\boldsymbol{K}$ will be a set of formulas containing $\boldsymbol{K}$ closed under its rules and uniform substitution. A logic extending $\boldsymbol{K^2}$ is similarly defined. Finally, we will prove that the classes of logics extending $\boldsymbol{K}$ and $\boldsymbol{K^2}$ are closely related as well and there is a 1-1-correspondence between the logics extending $\boldsymbol{K}$ and extending $\boldsymbol{K^2}$.

Keywords: Normal modal logic, Binary normal modal logic, Kripke semantics, Binary Kripke semantics, Completeness, Faithful interpretation.

* Assistant Professor, Research Institute of Hikmat and Philosophy of Iran, f.shmaleki2012@yahoo.com
Date received: 2023/02/08, Date of acceptance: 2023/05/07

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

منطق وجهی نرمال دوموضعی

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی*

چکیده

در این مقاله، ابتدا معناشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضعی را تعریف کرده و سیستمی به نام $\boldsymbol{K^2}$ که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است را معرفی خواهیم کرد. سپس دو نوع ترجمه ارائه خواهیم کرد و با استفاده از این ترجمه‌ها نشان خواهیم داد که منطق وجهی نرمال دوموضعی ($\boldsymbol{K^2}$) و منطق وجهی نرمال استاندارد ($\boldsymbol{K}$) بسیار به هم مرتبط هستند. یک ترجمه را تعبیر-پایدار می‌نامیم در صورتی که اثبات‌پذیری در هردو جهت حفظ شود. طبق این تعریف، ثابت خواهیم کرد که هر دو ترجمه‌ی معرفی شده، تعبیر-پایدار از $\boldsymbol{K}$ به $\boldsymbol{K^2}$ و بالعکس هستند. یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}$، یک مجموعه از فرمول‌ها است که شامل $\boldsymbol{K}$ است و تحت قواعد آن و جانشینی یکنواخت بسته است. توسیعی از منطق $\boldsymbol{K^2}$ را نیز به همین صورت تعریف خواهیم کرد. در نهایت ثابت خواهیم کرد که یک تناظر یک‌به‌یک بین توسیع‌هایی از منطق $\boldsymbol{K}$ و منطق $\boldsymbol{K^2}$ وجود دارد.

کلیدواژه‌ها: منطق وجهی نرمال، منطق وجهی نرمال دوموضعی، معناشناسی کریپکی، معناشناسی کریپکی دوموضعی، تمامیت، تعبیر پایدار.

۱. مقدمه

عملگر دوموضعی برای منطق‌های وجهی غیر-نرمال نخستین بار توسط دیانگ و شیرمحمدزاده در [4] معرفی شده است. هدف آنها از معرفی عملگر دوموضعی برای منطق‌های وجهی

* استادیار، موسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران، f.shmaleki2012@yahoo.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۷

غیرنرمال، پیدا کردن همتای وجهی برای منطق زیرشهودی WF بود. دستگاه WF منطق تعریف شده از اصل‌ها و قواعد زیر است:

۱. $A \to A \vee B$	۸. $\frac{A \quad A \to B}{B}$
۲. $B \to A \vee B$	۹. $\frac{A}{B \to A}$
۳. $A \wedge B \to A$	۱۰. $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$
۴. $A \wedge B \to B$	۱۱. $\frac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$
۵. $A \to A$	۱۲. $\frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$
۶. $\perp \to A$	۱۳. $\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$
۷. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	۱۴. $\frac{A \leftrightarrow B \quad C \leftrightarrow D}{(A \to C) \leftrightarrow (B \to D)}$

همتای وجهی برای منطق زیر شهودی WF به عنوان یک مسأله‌ی باز در [3, 8] مطرح شده بود، تا اینکه دیانگ و شیرمحمدزاده در سال ۲۰۲۱ [4] با معرفی معناشناسی همسایگی دوموضعی و منطق وجهی (غیر–نرمال) دوموضعی به این مسأله‌ی باز پاسخ دادند و شیرمحمدزاده در مقاله‌ای دیگر [9] همتاهای وجهی دوموضعی برای سایر منطق‌های زیرشهودی را معرفی کرد. اخیراً و در مقاله‌ای دیگر [5]، رابطه‌ی بین منطق‌های وجهی یک موضعی و منطق‌های وجهی دوموضعی به طور گسترده‌تری مورد بررسی قرار گرفته است. نخستین بار در سال ۱۹۷۰ معناشناسی همسایگی که گسترشی از معناشناسی کریپکی است، برای بررسی منطق‌های وجهی کلاسیک معرفی شد. در مدل‌های همسایگی برای منطق وجهی، به هر حالتی، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های جهان نسبت داده می‌شود که همسایگی آن حالت نامیده می‌شود و فرمول وجهی $\Box A$ در جهان w درست است اگر و تنها اگر مجموعه جهان‌هایی که در آنها A درست است یک همسایگی از w باشد[۲]. منیری و شیرمحمدزاده معناشناسی همسایگی را برای منطق IPC و BPC معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را برای آنها ثابت کرده‌اند [۶،۷].

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، تعاریف و قضایای مربوط به منطق وجهی نرمال یک موضعی (استاندارد)، که در سایر بخش‌های این مقاله نیاز خواهیم داشت را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، یک معناشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضعی را تعریف کرده و سیستمی معرفی خواهیم کرد که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است. در بخش ۴، با ارائه‌ی ترجمه‌هایی از زبان منطق وجهی نرمال استاندارد به

زبان منطق وجهی نرمال دوموضعی و بالعکس، نشان خواهیم داد که نه تنها فرمول‌های منطق وجهی نرمال $\boldsymbol{K}$ و منطق وجهی نرمال دوموضعی $\boldsymbol{K}^2$ با استفاده از ترجمه‌هایی به هم مرتبط هستند، بلکه توسیع‌های این منطق‌ها نیز با استفاده از این ترجمه‌ها ارتباط بسیار نزدیکی باهم دارند و در تناظر یک‌به‌یک هستند.

۲. منطق وجهی نرمال

در این بخش به معرفی منطق وجهی نرمال یک موضعی $\boldsymbol{K}$ خواهیم پرداخت. برای مطالعه بیشتر راجع به این منطق به [1, 2, 10, 11] مراجعه شود.

منطق وجهی نرمال، منطق ضرورت و امکان است و یک گزاره ضرورتاً درست است هرگاه در هر جهان ممکن، راست باشد. در حالت کلی زبان منطق وجهی با افزودن عملگر $\Box$ به زبان منطق کلاسیک، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲ زبان وجهی نرمال $L^{\Box}(At)$، کوچکترین مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط دستور زبان زیر است (p متغیر اتمی است و مجموعه‌ی متغیرهای اتمی را با $\mathbb{P}$ نشان می‌دهیم):

$$p|\neg A|A \wedge B|\Box A.$$

توجه داشته باشیم که زبان منطق کلاسیک غیر وجهی، $L_c(At)$، یک زیرزبان از $L^{\Box}(At)$ است و نمادهای $\leftrightarrow$ ، $\rightarrow$ ، $\vee$ و $\top$ طبق معمول تعریف می‌شوند. ضمناً عملگر $\Diamond$ را برحسب عملگر $\Box$ به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg(\Box\neg A)$$

تعبیر $\Box A$، آن است که «A ضرورتاً درست است» و تعبیر $\Diamond A$، آن است که «A ممکن است».

تعریف ۲.۲ (قاب کریپکی) دوتایی $F = \langle W, R\rangle$ یک قاب کریپکی منطق وجهی نرمال نامیده می‌شود، در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از عناصر باشد که جهان (ممکن) نامیده می‌شوند و R یک رابطه‌ی دوتایی روی W است که رابطه‌ی دسترس‌پذیری نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲ (مدل کریپکی) سه تایی $M = \langle W, R, V\rangle$ یک مدل کریپکی منطق وجهی نرمال نامیده می‌شود، در صورتی که $\langle W, R\rangle$ یک قاب کریپکی و $V\colon \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ یک تابع ارزش‌گذاری روی این قاب باشد.

تعریف ۴.۲ (درستی) فرض کنید $M = \langle W, R, V\rangle$، یک مدل کریپکی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $M, w \vDash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $M, w \vDash \neg A$ اگر و تنها اگر $M, w \nvDash A$،

۳. $M, w \vDash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $M, w \vDash A$ و $M, w \vDash B$،

۴. $M, w \vDash \Box A$ اگر و تنها اگر برای هر $w' \in W$ با $w\,R\,w'$ داشته باشیم $M, w' \vDash A$.

تعریف ۵.۲ یک فرمول وجهی A در یک مدل کریپکی $M = \langle W, R, V\rangle$ **راست** است هرگاه به ازای هر $w \in W$، $M, w \vDash A$. در این صورت می‌نویسیم $M \vDash A$. فرمول وجهی A **معتبر** است هرگاه در هر مدل کریپکی وجهی راست باشد.

برای معرفی دستگاه اصل موضوعی منطق وجهی نرمال، اصول و قواعد زیر را درنظر می‌گیریم:

PC　　هر اصل‌بندی از منطق گزاره‌ای

K　　$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

MP　　$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

Nec　　$\dfrac{A}{\Box A}$

تعریف ۶.۲ منطق $\boldsymbol{K}$ را کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت نمونه جانشین‌های PC و K و قواعد استنتاجی MP و Nec قرار می‌دهیم. منطق $\boldsymbol{K}$ را **منطق وجهی نرمال** می‌نامند.

در منطق وجهی، اصل K، اصل توزیع پذیری نامیده می‌شود و قواعد MP و Nec به ترتیب قاعده‌ی وضع مقدم و قاعده‌ی ضرورت نامیده می‌شوند. توجه داشته باشیم که مفاهیم "برهان" و "قضیه" در منطق $\boldsymbol{K}$ به روش‌های معمول همیشگی تعریف می‌شوند.

اثبات قضیه‌ی زیر را می‌توان در [1] یافت.

قضیه ۷.۲ (تمامیت) منطق $\boldsymbol{K}$ نسبت به رده‌ی همه‌ی قاب‌های کریپکی درست و قویاً تمام است.

۳. معناشناسی برای منطق وجهی نرمال دوموضعی با ارائهٔ یک سیستم

در این بخش، یک معناشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضعی را تعریف کرده و سیستمی را معرفی خواهیم کرد که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است. برای این منظور، ابتدا زبان وجهی نرمال دوموضعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ زبان وجهی نرمال دوموضعی $L^{\Rightarrow}(At)$، کوچکترین مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط دستور زبان زیر است (p متغیر اتمی است):

$$p|\neg A|A \wedge B|A \Rightarrow B.$$

توجه داشته باشیم که همانند زبان وجهی نرمال، $L_c(At)$ یک زیرزبان از $L^{\Rightarrow}(At)$ است و نمادهای $\leftrightarrow$ ، $\rightarrow$ ، $\vee$ و $\top$ طبق معمول و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A \vee B := \neg A \wedge \neg B,$$
$$A \rightarrow B := \neg A \vee B,$$
$$A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

تعریف ۲.۳ (قاب کریپکی دوموضعی) دوتایی $F = \langle W, R \rangle$ یک قاب کریپکی دوموضعی منطق وجهی نرمال دوموضعی نامیده می‌شود، در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و R یک رابطه‌ی دوتایی روی W باشد. **مدل کریپکی دوموضعی** منطق وجهی نرمال دوموضعی، سه تایی $M = \langle W, R, V \rangle$ است که در آن $\langle W, R \rangle$ یک قاب کریپکی منطق وجهی نرمال دوموضعی است و $V: \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ یک تابع ارزشگذاری است.

تعریف ۳.۳ (درستی) فرض کنید $M = \langle W, R, V \rangle$، یک مدل کریپکی دوموضعی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $M, w \vDash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $M, w \vDash \neg A$ اگر و تنها اگر $M, w \nvDash A$،

۳. $M, w \vDash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $M, w \vDash A$ و $M, w \vDash B$،

۴. $M, w \vDash A \Rightarrow B$ اگر و تنها اگر برای هر $w' \in W$ با $w\, R\, w'$ داشته باشیم: اگر $M, w' \vDash A$ آنگاه $M, w' \vDash B$.

در ادامه‌ی این بخش اصل و قاعده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$((A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow (C \Rightarrow D)) \qquad K_{\Rightarrow}$$

$$\frac{A \rightarrow B}{A \Rightarrow B} \quad \text{Imp}$$

تعریف ۴.۳ منطق $\boldsymbol{K^2}$ را کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت نمونه جانشین‌های PC و $K_{\Rightarrow}$ و قاعده‌های Imp و MP قرار می‌دهیم. منطق $\boldsymbol{K^2}$ را **منطق وجهی نرمال دوموضعی** می‌نامیم.

لم ۵.۳ در منطق وجهی نرمال دوموضعی، دو قاعده زیر اثبات می‌شوند:

الف. $\dfrac{(A\to B)\wedge(C\to D)\to(E\to F)}{(A\Rightarrow B)\wedge(C\Rightarrow D)\to(E\Rightarrow F)}$

ب. $\dfrac{(A_1\to B_1)\wedge\ldots\wedge(A_n\to B_n)\to(E\to F)}{(A_1\Rightarrow B_1)\wedge\ldots\wedge(A_n\Rightarrow B_n)\to(E\Rightarrow F)}$

اثبات. تنها به اثبات مورد الف می‌پردازیم:

۱. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (C \to D) \to (E \to F)$ فرض

۲. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to ((C \to D) \to (E \to F))$ طبق ۱

۲. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \Rightarrow ((C \to D) \to (E \to F))$ طبق 2 و قاعده Imp

۳. $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \Rightarrow ((C \to D) \to (E \to F))) \to ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \to ((C \to D) \Rightarrow (E \to F))$ اصل $K_{\Rightarrow}$

۴. $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \to ((C \to D) \Rightarrow (E \to F))$ طبق ۲، ۳ و قاعده MP

۵. $((C \to D) \Rightarrow (E \to F)) \to ((C \Rightarrow D) \to (E \Rightarrow F))$ اصل $K_{\Rightarrow}$

۶. $(A \Rightarrow B) \to ((C \Rightarrow D) \to (E \Rightarrow F))$ طبق ۴ و ۵

۷. $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (C \Rightarrow D) \to (E \Rightarrow F))$ طبق ۶

در ادامه و با استفاده از مدل‌های کانونی، تمامیت منطق وجهی نرمال دوموضعی را اثبات خواهیم کرد. توجه داشته باشیم که مفاهیم برهان و قضیه در منطق $\boldsymbol{K^2}$ به روش‌های معمول همیشگی تعریف می‌شوند.

تعریف ۶.۳ مدل $\mathrm{M}^{K^2} = \langle \mathrm{W}_{K^2}, R_{K^2}, V_{K^2} \rangle$ را مدل کانونی منطق $\boldsymbol{K^2}$ نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. W_{K^2} مجموعه‌ی همه‌ی $\boldsymbol{K^2}$–سازگار ماکسیمال‌ها است.

۲. رابطه‌ی دوتایی R_{K^2} روی W_{K^2} به این صورت تعریف می‌شود: اگر برای هر فرمول A و B، از $\neg(A \Rightarrow B) \in w$ نتیجه بگیریم $\neg B \wedge A \in v$، آنگاه داریم $R_{K^2}wv$.

۳. تابع ارزشگذار V_{K^2} به صورت $V_{K^2} = \{w \in \mathrm{W}_{K^2} \mid p \in w\}$ تعریف می‌شود.

لــم ۷.۳ $R_{K^2}wv$ اگـر و تنهـا اگـر بـرای هـر فرمـول A و B، $A \Rightarrow B \in w$ نتیجـه دهـد $\neg A \vee B \in v$.

اثبات. ابتدا راست به چپ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $R_{K^2}wv$ و $\neg A \vee B \notin v$. حـال از آن‌جایی‌که v یک $\boldsymbol{K^2}$-سازگار ماکسـیمال اسـت، نتیجـه مـی‌گیـریم کـه $\neg B \wedge A \in v$. طبـق فرض داریم $R_{K^2}wv$، لذا $\neg(A \Rightarrow B) \in w$. حال چون w سازگار است، در نتیجه $A \Rightarrow B \notin w$ و حکم اثبات می‌شود.

برای اثبات چپ به راست، فرض کنید v با w رابطه نداشته باشد، یعنـی $\neg B \wedge A \in v$ و $\neg(A \Rightarrow B) \notin w$. در ایـن‌صـورت، از آنجـایی‌کـه w یـک $\boldsymbol{K^2}$-سـازگار ماکسـیمال اسـت، نتیجه می‌گیریم که $A \Rightarrow B \in w$. لذا طبـق فـرض مسـئله داریـم $\neg A \vee B \in v$، امـا ایـن یـک تناقض است. در نتیجه $R_{K^2}wv$.

در ادامه به اثبات لم وجود خواهیم پرداخت.

لم ۸.۳ (لم وجود) اگر $\neg(A \Rightarrow B) \in w$، آنگاه جهان v در W_{K^2} موجود است به‌طوری‌که $R_{K^2}wv$ و $\neg B \wedge A \in v$.

اثبات. فرض کنید $\neg(A \Rightarrow B) \in w$. یک جهان مانند vخواهیم ساخت به‌طوریکه $R_{K^2}wv$ و $\neg B \wedge A \in v$. برای این منظور مجموعه‌ی v^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v^* = \{\neg B \wedge A\} \cup \{\neg C \vee D \mid C \Rightarrow D \in w\}$$

ابتدا نشان خواهیم داد که v^* سازگار اسـت. فـرض کنیـد چنـین نباشـد، لـذا فرمـول‌هـای $\neg C_1 \vee D_1, \dots, \neg C_n \vee D_n$ موجود هستند به‌طوریکه :

$$\vdash (\neg C_1 \vee D_1) \wedge \dots \wedge (\neg C_n \vee D_n) \to \neg(\neg B \wedge A)$$

لذا،

$$\vdash (C_1 \to D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \to D_n) \to (A \to B)$$

حال طبق لم ۵.۳، نتیجه می‌گیریم

$$\vdash (C_1 \Rightarrow D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \Rightarrow D_n) \to (A \Rightarrow B).$$

از آنجایی‌که $(C_1 \Rightarrow D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \Rightarrow D_n) \in w$ ، نتیجه می‌شود که $(A \Rightarrow B) \in w$. امـا این یک تناقض است، زیرا w یک $\boldsymbol{K^2}$-سـازگار ماکسـیمال اسـت. لـذا نتیجـه مـی‌گیـریم کـه مجموعه‌ی v^* سازگار است. طبق لم لیندن باؤم، توسیعی از v^* مانند v موجود اسـت و طبـق

مراحل ساخت v داریم $\neg B \wedge A \in v$. همچنین برای همه‌ی فرمول‌های C, D که $C \Rightarrow D \in w$ داریم، $\neg C \vee D \in v$. لذا طبق لم ۷.۳، نتیجه می‌گیریم که $R_{K^2}wv$.

لم ۹.۳ (لم درستی) برای هر فرمول C، $\mathrm{M}^{K^2}, w \Vdash C$ اگر و تنها اگر $C \in w$.

اثبات. اثبات با استقراء روی پیچیدگی فرمول C انجام می‌شود. در مرحله‌ی استقراء، حالت $C = A \Rightarrow B$ را اثبات می‌کنیم. اثبات بقیه‌ی حالت‌ها از فرض استقراء، ساده است. اثبات راست به چپ برای این حالت به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\mathrm{M}^{K^2}, w \Vdash \neg(A \Rightarrow B) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \exists v \left(R_{K^2}wv \ \text{ و } \ \mathrm{M}^{K^2}, v \Vdash \neg B \wedge A \right)$$

$$\text{طبق فرض استقراء} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \exists v \left(R_{K^2}wv \ \text{ و } \ \neg B \wedge A \in v \right)$$

$$\text{طبق تعریف } R_{K^2} \quad \text{تنها اگر} \quad \neg(A \Rightarrow B) \in w.$$

اثبات چپ به راست نیز با استفاده از لم ۸.۳، به راحتی اثبات می‌شود.

قضیه ۱۰.۳ (تمامیت) منطق $\boldsymbol{K^2}$ نسبت رده‌ی همه‌ی قاب‌های کریپکی دوموضعی درست و قویاً تمام است.

اثبات. درست بودن این منطق به سادگی اثبات می‌شود. برای اثبات تمامیت قوی، کافی است برای هر مجموعه‌ی $\boldsymbol{K^2}$-سازگار از فرمول‌ها مانند Γ، یک مدل مانند M و جهانی مانند w در M پیدا کنیم، به‌طوریکه، $M, w \Vdash \Gamma$. برای این منظور فرض کنید Σ یک مجموعه‌ی سازگار از منطق $\boldsymbol{K^2}$ باشد. آنگاه طبق لم لیندن‌باوم، توسیعی از Σ، مانند Σ^* موجود است که سازگار ماکسیمال است. در نتیجه، طبق لم درستی داریم، $M^{K^2}, \Sigma^* \Vdash \Sigma$.

۴. رابطهٔ بین منطق‌های نرمال یک‌موضعی و دوموضعی

در این بخش نشان خواهیم داد که نه تنها فرمول‌های منطق‌وجهی نرمال یک‌موضعی $\boldsymbol{K}$ و منطق وجهی نرمال دوموضعی $\boldsymbol{K^2}$ با استفاده از ترجمه‌هایی به هم مرتبط هستند، بلکه توسیع‌های این منطق‌ها نیز در تناظر یک‌به‌یک با یکدیگر هستند.

تعریف ۱.۴ نگاشت $\star$ از $L^{\Box}$ به $L^{\Rightarrow}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $(p)^\star := p$،

۲. $(\neg A)^\star := \neg A^\star$،

۳. $(A \wedge B)^\star := A^\star \wedge B^\star$،

۴. $(\Box A)^\star := \top \Rightarrow A^\star$.

قضیه ۲.۴ اگر $\vdash_K A$، آنگاه $\vdash_{K^2} A^\star$.

اثبات. با استقراء روی استنتاج A اثبات می‌شود. تنها به اثبات قانون Nec و اصل K خواهیم پرداخت.

ابتدا قانون Nec:

۱. $\vdash_{K^2} A^\star$ طبق فرض استقراء

۲. $\vdash_{K^2} \top \to A^\star$ طبق ۱

۳. $\vdash_{K^2} \top \Rightarrow A^\star$ طبق ۲ و قانون Imp

۴. $\vdash_{K^2} (\Box A)^\star$ طبق ۳ و تعریف ★

در ادامه به بررسی اصل K خواهیم پرداخت، یعنی نشان خواهیم داد که $\vdash_{K^2} (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))^\star$:

۱. $\vdash_{K^2} (A \to B) \to (A \to B)$ تاتولوژی

۲. $\vdash_{K^2} \big(\top \to (A \to B)\big) \to \big((\top \to A) \to (\top \to B)\big)$ طبق ۱

۳. $\vdash_{K^2} \big(\top \to (A^\star \to B^\star)\big) \to \big((\top \to A^\star) \to (\top \to B^\star)\big)$ جانشینی در ۲

۴. $\vdash_{K^2} \big(\top \to (A^\star \to B^\star)\big) \Rightarrow \big((\top \to A^\star) \to (\top \to B^\star)\big)$ طبق ۳ و قانون Imp

۵. $\vdash_{K^2} \big(\top \Rightarrow (A^\star \to B^\star)\big) \to \big((\top \to A^\star) \Rightarrow (\top \to B^\star)\big)$ طبق ۴، اصل $K_\Rightarrow$ و قانون MP

۶. $\vdash_{K^2} \big((\top \to A^\star) \Rightarrow (\top \to B^\star)\big) \to \big((\top \Rightarrow A^\star) \to (\top \Rightarrow B^\star)\big)$ اصل $K_\Rightarrow$

۷. $\vdash_{K^2} \big(\top \Rightarrow (A^\star \to B^\star)\big) \to \big((\top \Rightarrow A^\star) \to (\top \Rightarrow B^\star)\big)$ طبق ۵ و ۶

۸. $\vdash_{K^2} (\Box(A \to B))^\star \to ((\Box A)^\star \to (\Box B)^\star)$ طبق ۷ و تعریف ★

۹. $\vdash_{K^2} (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))^\star$ طبق ۸ و تعریف ★

لذا حکم اثبات شد.

تعریف ۳.۴ نگاشت $\#$ از $L^\Rightarrow$ به $L^\Box$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $(p)^\# := p$،

۲. $(\neg A)^\# := \neg A^\#$،

۳. $(A \wedge B)^\# := A^\# \wedge B^\#$،

۴. $(A \Rightarrow B)^\# := \Box(A^\# \to B^\#)$.

قضیه ۴.۴ اگر $\vdash_{K^2} A$، آنگاه $\vdash_{K} A^\#$.

اثبات. با استقراء روی استنتاج A اثبات می‌شود. تنها به اثبات قانون Imp و اصل $K_{\Rightarrow}$ خواهیم پرداخت.

ابتدا قانون Imp:

۱. $\vdash_K (A \to B)^\#$ طبق فرض استقراء

۲. $\vdash_K A^\# \to B^\#$ طبق ۱

۳. $\vdash_K \Box(A^\# \to B^\#)$ طبق ۲ و قانون Nec

۴. $\vdash_K (A \Rightarrow B)^\#$ طبق ۳ و تعریف #

در ادامه به بررسی اصل $K_{\Rightarrow}$ خواهیم پرداخت، یعنی نشان خواهیم داد که $\vdash_K (((A \to B) \Rightarrow (C \to D)) \to ((A \Rightarrow B) \to (C \Rightarrow D)))^\#$:

۱. $\vdash_K \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ اصل K

۲. $\vdash_K \Box((A^\# \to B^\#) \to (C^\# \to D^\#)) \to (\Box(A^\# \to B^\#) \to \Box(C^\# \to D^\#))$ جانشینی در ۱

۳. $\vdash_K ((A \to B) \Rightarrow (C \to D))^\# \to ((A \Rightarrow B) \to (C \Rightarrow D))^\#$ طبق ۲ و تعریف #

۴. $\vdash_K (((A \to B) \Rightarrow (C \to D)) \to ((A \Rightarrow B) \to (C \Rightarrow D)))^\#$ طبق ۳ و تعریف #

لذا حکم اثبات شد.

لم ۵.۴ $\vdash_{K^2} (\top \Rightarrow (A \to B)) \leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

اثبات.

۱. $(A \to B) \to \big(\top \to (A \to B)\big)$ تاتولوژی

۲. $(A \to B) \Rightarrow \big(\top \to (A \to B)\big)$ طبق ۱ و قانون Imp

۳. $((A \to B) \Rightarrow \big(\top \to (A \to B)\big)) \to ((A \Rightarrow B) \to (\top \Rightarrow (A \to B))$ اصل $K_{\Rightarrow}$

۴. $((A \Rightarrow B) \to (\top \Rightarrow (A \to B))$ طبق ۲ و ۳

۵. $(\top \to (A \to B)) \to (A \to B)$ تاتولوژی

۶. $(\top \to (A \to B)) \Rightarrow (A \to B)$ طبق ۴ و قانون Imp

۷. $((\top \to (A \to B)) \Rightarrow (A \to B)) \to ((\top \Rightarrow (A \to B)) \to (A \Rightarrow B))$ اصل $K_{\Rightarrow}$

۸. $(\top \Rightarrow (A \to B)) \to (A \Rightarrow B)$ طبق ۶ و ۷

۹. $(\top \Rightarrow (A \to B)) \leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ طبق ۴ و ۸

در ادامه دو ترجمه معرفی شده در بالا را با هم ترکیب خواهیم کرد.

لم ۶.۴ الف. $\vdash_K A \leftrightarrow A^{\star\#}$.

ب. $\vdash_{K^2} A \leftrightarrow A^{\#\star}$.

اثبات. الف. اثبات با استقرا روی پیچیدگی فرمول A انجام می‌شود. برای A اتمی حکم مورد نظر جزئی از تعاریف است. اثبات حالت‌های عطفی و فصلی با استفاده از فرض استقراء، ساده است. فرض کنید $A = \Box B$. بایستی نشان دهیم که $\vdash_K (\Box B) \leftrightarrow (\Box B)^{\star\#}$. طبق تعریف ★، $(\Box B)^{\star\#}$ برابر با $(\top \Rightarrow B^{\star})^{\#}$ است و دوباره طبق تعریف ♯، برابر با $\Box(\top \to B^{\star\#})$، یا همان $\Box\big(B^{\star\#}\big)$، است. در نهایت، طبق فرض استقراء، $\Box(B^{\star\#})$ برابر با $\Box B$ است. لذا حکم اثبات شد.

ب. اثبات با استقرا روی پیچیدگی فرمول A انجام می‌شود. برای A اتمی حکم مورد نظر جزئی از تعاریف است. اثبات حالت‌های عطفی و فصلی با استفاده از فرض استقراء، ساده است. فرض کنید $A = B \Rightarrow C$. بایستی نشان دهیم که $\vdash_K (B \Rightarrow C) \leftrightarrow (B \Rightarrow C)^{\#\star}$. طبق تعریف ♯، $(B \Rightarrow C)^{\#\star}$ برابر با $(\Box(B^{\#} \to C^{\#}))^{\star}$ است و دوباره طبق تعریف ♯، برابر با $(\top \Rightarrow (B^{\#\star} \to C^{\#\star}))$ است. طبق لم ۵.۴، $(\top \Rightarrow (B^{\#\star} \to C^{\#\star})$ معادل با $(B^{\#\star} \Rightarrow C^{\#\star})$ است. درنهایت، طبق فرض استقراء، $(B^{\#\star} \Rightarrow C^{\#\star})$ برابر با $B \Rightarrow C$ است. لذا حکم اثبات شد.

قضیه ۷.۴ الف. اگر $\vdash_{K^2} A^{\star}$، آنگاه $\vdash_K A$.

ب. اگر $\vdash_K A^{\#}$، آنگاه $\vdash_{K^2} A$.

اثبات. الف. فرض کنید $\vdash_{K^2} A^{\star}$، آنگاه طبق قضیه ۴.۴، داریم $\vdash_K A^{\star\#}$. مطابق با لم ۶.۴، نیز نتیجه می‌گیریم که $\vdash_K A$.

ب. مشابه قسمت الف اثبات می‌شود.

نتیجه‌گیری ۸.۴ الف. $\vdash_{\boldsymbol{K}^2} A^\star$ اگر و تنها اگر $\vdash_{\boldsymbol{K}} A$.

ب. $\vdash_{\boldsymbol{K}} A^\#$ اگر و تنها اگر $\vdash_{\boldsymbol{K}^2} A$.

اثبات. موارد الف و ب از قضایای ۲.۴، ۴.۴ و ۷.۴ به دست می‌آیند.

یک ترجمه را **تعبیر–پایدار** می‌نامیم، در صورتی که اثبات‌پذیری در هر دو جهت حفظ شود. نتیجه‌گیری ۸.۴ بیان می‌کند که ترجمه‌ی $\star$ یک تعبیر–پایدار از منطق $\boldsymbol{K}$ به منطق $\boldsymbol{K}^2$ است و ترجمه‌ی $\#$ یک تعبیر–پایدار از منطق $\boldsymbol{K}^2$ به منطق $\boldsymbol{K}$ است. در ادامه خواهیم دید که کلاس‌های منطق‌هایی که، گسترش یافته‌ی منطق‌های K و $\boldsymbol{K}^2$ هستند نیز به هم مرتبط هستند. یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}$، یک مجموعه از فرمول‌ها است که شامل $\boldsymbol{K}$ است و تحت قواعد آن و جانشینی یکنواخت بسته است. توسیعی از منطق $\boldsymbol{K}^2$ نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۴ الف. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}$ باشد. $\mathcal{L}^\star$ را به عنوان بستار $\{A^\star \mid A \in \mathcal{L}\}$ تحت قواعد منطق $\boldsymbol{K}^2$ تعریف می‌کنیم.

ب. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}^2$ باشد. $\mathcal{L}^\#$ را به عنوان بستار $\{A^\# \mid A \in \mathcal{L}\}$ تحت قواعد منطق $\boldsymbol{K}$ تعریف می‌کنیم.

لم ۱۰.۴ الف. اگر $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}$ باشد و $A \in \mathcal{L}^\star$، آنگاه $A^\# \in \mathcal{L}$.

ب. اگر $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}^2$ باشد و $A \in \mathcal{L}^\#$، آنگاه $A^\star \in \mathcal{L}$.

اثبات. الف. فرض کنید $A \in \mathcal{L}^\star$، آنگاه تعداد متناهی فرمول $B_1^\star, \ldots, B_n^\star$، با $B_i \in \mathcal{L}$، $1 \leq i \leq n$، موجود است، به‌طوریکه $B_1^\star \wedge \ldots \wedge B_n^\star \vdash_{\boldsymbol{K}^2} A$ و در نتیجه داریم $\vdash_{\boldsymbol{K}^2} B_1^\star \wedge \ldots \wedge B_n^\star \to A$. از طرفی دیگر و طبق قضیه ۴.۴، داریم $\vdash_{\boldsymbol{K}} B_1^{\star\#} \wedge \ldots \wedge B_n^{\star\#} \to A^\#$. طبق قسمت "الف" از لم ۶.۴، نتیجه می‌گیریم $\vdash_{\boldsymbol{K}} \mathrm{B}_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A^\#$. حال از آنجایی‌که $\mathrm{B}_1 \wedge \ldots \wedge B_n \in \mathcal{L}$، لذا داریم $A^\# \in \mathcal{L}$.

ب. مشابه الف و با استفاده از قضیه‌ی ۲.۴، و قسمت "ب" از لم ۶.۴، نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۱.۴ الف. اگر $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}$ باشد، **آنگاه** $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\star\#}$.

ب. اگر $\mathcal{L}$ یک توسیع از منطق $\boldsymbol{K}^2$ باشد، **آنگاه** $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\#\star}$.

اثبات. الف. ابتدا ثابت می‌کنیم $\boldsymbol{\mathcal{L}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\#\star}$. فرض کنید $A \in \mathcal{L}$، آنگاه $A^\star \in \mathcal{L}^\star$ و $A^{\star\#} \in \mathcal{L}^{\star\#}$. طبق لم ۶.۴، $\vdash_K A \leftrightarrow A^{\star\#}$. در نتیجه $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\star\#}$. حال برای اثبات جهت عکس، فرض کنید

$A \in \mathcal{L}^{\star\#}$ آنگاه وجود دارد $B_1^\#, \dots, B_n^\#$، با $B_i \in \mathcal{L}^\star$، $1 \le i \le n$، به‌طوریکه $B_1^\# \wedge \dots \wedge B_n^\# \vdash_K A$.
طبق قسمت "الف" از لم ۱۰.۴، هر $B_i^\#$ متعلق به $\mathcal{L}$ است. در نتیجه $A \in \mathcal{L}$.

ب. مشابه قسمت الف اثبات می‌شود.

قضیه ۱۱.۴ به خوبی نشان می‌دهد که یک تناظر یک‌به‌یک بین توسیع‌هایی از منطق $\boldsymbol{K}$ و منطق $\boldsymbol{K^2}$ وجود دارد. به این معنی که هر بسطی از منطق وجهی نرمال $\boldsymbol{K}$ را می‌توان به خوبی به عنوان یک منطق وجهی نرمال دوموضعی معادل نشان داد و بالعکس.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا ثابت کردیم که منطق وجهی نرمال دوموضعی $\boldsymbol{K^2}$ نسبت به معناشناسی کریپکی دوموضعی درست و تمام است. سپس، نشان دادیم که برای همه‌ی منطق‌های وجهی نرمالی که توسیعی از منطق $\boldsymbol{K}$ هستند، یک منطق وجهی نرمال دوموضعی وجود دارد که اساساً معادل آن است و برعکس. به بیانی دیگر نشان داده شد که منطق وجهی نرمال دوموضعی را می‌توان به طور پایا در منطق وجهی نرمال یک‌موضعی استاندارد تفسیر کرد و بالعکس.

کتاب‌نامه

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی، همتاهای وجهی برای برخی منطق های زیر شهودی، منطق پژوهی، سال ۱۲، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۰، ۱۵۱–۱۷۳.

ضیاء موحد، منطق موجهات، انتشارات هرمس

لطف‌الله نبوی، مبانی منطق موجهات، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس

P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal Logic, Cambridge University press, 2014.

B. Chellas, Modal logic: An Introduction, Cambridge University Press, 1980.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Two neighborhood Semantics for Subintuition istic Logics, In 12th International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, TbiLLC 2018, LNCS, pp 64-85, Volume 11456, Springer 2019.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary Modal Companions for Subintuitionistic Logics, Mathematics, Logic and their Philosophies, pp 35-52, 2021.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary modal logic and unary modal logic, Logic Journal of the IGPL, 2023, https://doi.org/10.1093/jigpal/jzac083.

M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Neighborhood Semantics for Basic and Intuitionistic Logic, Logic and Logical Philosophy, pp 339-355, Volume 24, 2015.

M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Another Neighborhood Semantics for Intuitionistic Logic, Logic Journal of the IGPL, jzac069, September 2022, https://doi.org/10.1093/jigpal/jzac069

F. Shirmohammadzadeh Maleki, D. de Jongh, Weak Subintuitionistic Logics, Logic Journal of the IGPL, 25 (2), pp. 214-231, 2017.