Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol.14, No. 1, Spring and Summer 2023, 195-204
Doi: 10.30465/lsj.2023.45985.1444

Absolutely unsolvable problems and supertask computers

Morteza Moniri*

Abstract

First, in the light of Feferman's views, we will examine Gödel's dichotomy that either the capabilities of the human mind are beyond any finite machine, or there are Diophantine-type mathematical equations that are absolutely unsolvable. Then we examine Putnam's argument that if scientific competence of the mind can be simulated by a Turing machine with the ability to prepare a list of scientific propositions, this machine will not print out the sentence that expresses this ability. In an effort to better understand this proof, we restate it in the language of modal logic. Then, we discuss the possibility of supertask computations to perform infinite basic operations in finite time. This is a possibility that has recently been proposed based on new physical theories. We argue that, assuming that such a possibility is realized, arithmetic will be determinate, meaning that the truth or falsity of each arithmetic sentence will be explainable.

Keywords: Gödel, absolutely unsolvable problems, supertask computer, infinite Turing machine, infinite rule.

* Associate Professor of Mathematics Department, Shahid Beheshti University, ezmoniri@gmail.com

Date received: 2023/02/08, Date of acceptance: 2023/05/07

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر و رایانه‌های خارق‌العاده

مرتضی منیری*

چکیده

ابتدا، در پرتو آراء ففرمن، به بررسی دوگانهٔ گودل می‌پردازیم مبنی بر اینکه یا توانایی‌های ذهن انسان از هر ماشین متناهی فراتر است، و یا معادلات ریاضی از نوع دیوفانتی وجود دارند که به‌طور مطلق حل‌ناپذیر هستند. سپس برهان پاتنم را بررسی می‌کنیم مبنی بر این که اگر توانایی علمی ذهن انسان را بتوان توسط یک ماشین تورینگ با توانایی تهیهٔ سیاهه‌ای از نتایج علمی شبیه‌سازی کرد، این ماشین جمله‌ای که این توانایی را بیان می‌کند را به عنوان خروجی ارائه نخواهد کرد. در تلاش برای فهم بهتر این برهان، آن را در زبان منطق وجهی بازسازی می‌کنیم. در ادامه، به امکان رایانه‌های خارق‌العاده برای انجام تعدادی بی‌شمار عمل پایه‌ای محاسباتی در زمان متناهی می‌پردازیم. این امکانی است که اخیراً بر اساس نظریه‌های جدید فیزیکی مطرح شده است. استدلال می‌کنیم با فرض تحقق چنین امکانی، حساب مرتبهٔ اول متعین خواهد بود، به این معنی که صادق یا کاذب بودن هر جملهٔ حسابی توضیح‌پذیر خواهد بود.

کلیدواژه‌ها: گودل، مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر، رایانهٔ خارق‌العاده، ماشین تورینگ نامتناهی، قاعدهٔ نامتناهی.

۱. مقدمه

گودل (Gödel) در یک سخنرانی با عنوان «برخی قضیه‌های پایه‌ای دربارهٔ مبانی ریاضیات و کاربردهای آنها» که در سال ۱۹۵۱ ایراد نمود، یک دوگانهٔ فلسفی در مورد ریاضیات مطرح کرد

* دانشیار، عضو هیئت علمی، گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، ezmoniri@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۷

(Gödel, 1995). در اینجا روایت ففرمن (Feferman) از دیدگاه گودل را شرح می‌دهیم. این دوگانه به شکل زیر است: یا توانایی‌های ذهن انسان از هر ماشین متناهی فراتر است، و یا مسائل ریاضی ملموسی وجود دارند که به‌طورمطلق حل‌ناپذیرند. برای فهم این ادعا می‌بایست چند نکته را در نظر گرفت. اول اینکه در اینجا فرض شده است که ذهن در راه کشف حقایق ریاضی تنها از اصول صحیح ریاضی و قواعدی که صحت مقدمات آنها ضامن صحت نتیجه‌شان است، استفاده می‌کند. دوم اینکه فرض شده است که حساب مرتبهٔ اول پئانو(First-order Peano arithmetic) دقیقاً این اصول و قواعد را شامل می‌شود. سوم اینکه منظور از یک ماشین متناهی یک ابزار اثباتی است که دقیقاً (کد) گزاره‌های ریاضی اثبات‌پذیر توسط ذهن انسان را فهرست می‌کند (Feferman, 2006).

دوگانهٔ فوق متکی به قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل است. اگر همهٔ ریاضیات توسط یک ماشین متناهی قابل تولید باشد، از آنجا که سازگاری ریاضیات خود یک حقیقت ریاضی مقبول ذهن است و در عین حال توسط خود ماشین اثبات‌ناپذیر است، حداقل یک گزارهٔ به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیر وجود خواهد داشت. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ MRDP، اثبات شده توسط ماتیاسویچ (Matiyasevich)، رابینسون (Robinson)، دیویس (Davis) و پاتنم، جمله‌ای منطقی که سازگاری ریاضیات را بیان می‌کند، هم‌ارزی برحسب معادلات دیوفانتی (Diophantine equations) دارد؛ پس در اینجا با مسئله‌ای کاملاً ریاضی‌وار مواجه هستیم، یعنی یک معادلهٔ دیوفانتی که هیچ‌یک از دو حالت جواب داشتن یا نداشتن آن برای انسان قابل‌اثبات نیست. یادآوری می‌کنم که قضیهٔ MRDP بیان می‌کند هر فرمول محدود (یعنی فاقدسور نامحدود) هم‌ارز یک فرمول وجودی (یعنی فرمولی بدون سور با یک پیشوند سور وجودی) است (Davis, 1973). ارتباط قضیهٔ MRDP با معادلات دیوفانتی در این است که جواب داشتن هر معادلهٔ دیوفانتی را می‌توان توسط یک فرمول وجودی بیان کرد.

از دید گودل، موارد یادشده همگی مشخصات ریاضیات ذهنی (subjective mathematics) هستند، یعنی ریاضیات وابسته به انسان. اگر ریاضیات عینی (objective mathematics) را شامل آن حقایق ریاضی بدانیم که مستقل از انسان و بدون هیچ فرضی درست هستند، دوگانهٔ گودل را به شکل زیر هم می‌توان بیان کرد: یا ریاضیات عینی فراتر از ریاضیات ذهنی است و یا حقایق ریاضی‌ای وجود دارند که به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیرند.

البته ففرمن و حتی خود گودل، این امکان را که هر دو بخش این دوگانه درست باشند رد نمی‌کنند. برای نمونه، فرضیهٔ پیوستار یک نمونه از گزاره‌های ریاضی متعلق به ریاضیات

عینی است که ممکن است هیچ‌گاه در مورد آن توافق صورت نگیرد. از طرف دیگر، ماشین متناهی از نوع یادشده نیز ممکن است که شبیه‌سازی خوبی از ذهن بشر نباشد. بر این اساس، ففرمن معتقد است که دوگانهٔ فوق ممکن است چیز زیادی در مورد ذهن انسان نگوید.

پاتنم (Putnam) در نقدی که بر یکی از کتاب‌های راجر پنروز (Roger Penrose) (Penrose, 1996) نوشته است، این فرض که سازگاری ریاضیات، حقیقتی بی‌تردید برای انسان باشد را زیر سؤال می‌برد (پاتنم، ۱۴۰۱). به اعتقاد او، حتی اگر بپذیریم که ذهن انسان براساس یک الگوریتم معمولی کار می‌کند، ممکن است این الگوریتم آن‌قدر پیچیده باشد که فهم کامل آن و پذیرفتن بی‌عیب‌ونقص بودنش بسیار دشوار و دست‌نایافتنی باشد.

در فصل دوم به بررسی نظر گودل و پاتنم در مورد امکان شبیه‌سازی ذهن بشر توسط ماشینی از قبیل ماشین تورینگ خواهیم پرداخت. در این راستا، اثبات پاتنم مبنی بر این که اگر چنین ماشینی توانایی شبیه‌سازی قدرت استدلالی ذهن بشر و تهیهٔ گام‌به‌گام سیاهه‌ای از همهٔ دانسته‌های خود را داشته باشد، آن‌گاه گزاره‌ای که این امکان را بیان می‌کند در این سیاهه ظاهر نخواهد شد را به‌صورت صوری ترجمه می‌کنیم. در فصل سوم به تأثیر پذیرش ماشین‌های محاسب خارق‌العاده در تعیین صدق و کذب گزاره‌های حسابی خواهیم پرداخت. نشان خواهیم داد که برخلاف ادعای وارن و وکسمن، با وجود چنین ماشینهایی، هر گزارهٔ مرتبهٔ اول حسابی دارای ارزش صدق معینی خواهد بود. یک ماشین تورینگ نامتناهی که تعدادی نامتناهی عملیات را در زمانی متناهی انجام دهد را می‌توان از زمرهٔ این ماشینهای محاسب خارق‌العاده دانست (Hamkins & Lewis, 2000).

۲. پاتنم: ذهن‌ها و ماشین‌ها

پاتنم در (Putnam, 2006) به موضوع ذهن و ماشین پرداخته است. در این مقاله، پاتنم می‌گوید که از چامسکی (Chomsky) پرسیده است که «آیا توانایی‌های ذهنی بشر، شامل زبان و علم، را می‌توان توسط یک ماشین تورینگ (Turing machine) ارائه کرد؟». جواب چامسکی «آری» بوده است. پاتنم نشان می‌دهد که اگر این ادعا درست باشد، خود این ادعا توسط چنین ماشینی قابل‌اثبات نخواهد بود. در ادامه اثبات مدنظر پاتنم توضیح داده می‌شود.

فرض کنید که Competence این فرضیهٔ تجربی باشد که یک ماشین تورینگ خاص T توانایی علمی ما انسان‌ها را شبیه‌سازی می‌کند. پاتنم نشان می‌دهد که در صورت درستی این فرض، خود آن فاقد توجیه توسط ماشین T، و بنابراین انسان، خواهد بود. به‌صورت دقیق‌تر،

فرض کنید که $\text{Justified}(p)$ به‌ازای گزارهٔ p به این معنی باشد که براساس این شواهد موجود، گزارهٔ p پذیرفتنی است. دراین‌صورت Competence بیان می‌کند که همهٔ موارد لازم در زبان T قابل‌بیان هستند و T سرانجام $\text{Justified}(p)$ را به‌عنوان خروجی اعلام خواهد کرد اگر و تنها اگر $\text{Justified}(p)$ درست باشد. کاری که پاتنم انجام می‌دهد این است که با فرضیاتی معقول ثابت می‌کند که اگر Competence درست باشد، آن‌گاه ماشین فوق‌الذکر Justified(Competence) را به‌عنوان خروجی ارائه نخواهد کرد. اثبات پاتنم در زبان طبیعی بیان شده است. برای بیان واضح‌تر اثبات مدنظر پاتنم آن را در زبان منطق وجهی بازسازی می‌کنیم.

با توجه به دو فرض Competence و Justified(Competence) می‌توان خواص $\text{Justified}(p)$ را با استفاده از زبان منطق وجهی نمایش داد. برای این منظور، کافی است دو اصل زیر را به اصول و قواعد منطق پایه‌ای نرمال K افزود:

$$\Box P \leftrightarrow \Box\Box P,$$
$$\neg(\Box P \wedge \Box\neg P).$$

به‌علاوه، بنابر قضیهٔ نقطهٔ ثابت گودل (Gödel's fixed point theorem) جملهٔ G وجود دارد به‌طوری‌که

$$\neg\Box G \leftrightarrow G. \qquad (*)$$

توجه کنید که دستگاه منطقی موردنظر پاتنم شامل حساب پئانو است و قضیهٔ نقطهٔ ثابت گودل برای آن برقرار است. از خواص یادشده می‌توان به تناقض رسید. برای این منظور، کافی است که توجه کنیم از (*) در دستگاه K می‌توان نتیجه گرفت

$$\Box\neg\Box G \leftrightarrow \Box G$$

ضمناً از اصل اول نتیجه می‌شود

$$\Box G \leftrightarrow \Box\Box G.$$

پس خواهیم داشت

$$\Box\neg\Box G \leftrightarrow \Box\Box G.$$

ولی فرمول به‌دست‌آمده با اصل دوم در تناقض است. بنابراین، Competence و Justified(Competence) نمی‌توانند هم‌زمان درست باشند.

۳. رایانه‌های خارق‌العاده

در این بخش به این پرسش می‌پردازیم که، آیا با فرض وجود رایانه‌های خارق‌العاده (supertask computers)، مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر ریاضی وجود خواهند داشت؟ این پرسشی معناشناسانه (semantical) است و بنابراین تحقیق در مورد آن در فرامعناشناسی (metasemantics) صورت می‌گیرد. یک رایانهٔ خارق‌العاده قادر است که تعدادی نامتناهی (شمارا) عملیات ساده محاسباتی را در زمانی متناهی انجام دهد. برای مثال، یک چنین ماشینی قادر است با بررسی همهٔ موارد فرضیهٔ گولدباخ (Goldbach)، درستی یا نادرستی آن را بررسی کند (Manchak & Roberts, 2022; Shagrir, 2004). البته، باید دامنهٔ مسائل ریاضی موردنظر را مشخص کرد. در واقع، می‌توان قدرت محاسباتی چنین ماشینهایی را پس از صوری‌سازی و تعریف دقیق ریاضی آنها کاملاً مشخص کرد.

ماشین‌های تورینگ (زمان) نامتناهی (infinite time Turing machine) که اخیراً به‌صورت ریاضی‌وار تعریف شده‌اند را می‌توان نوعی صوری‌سازی از رایانه‌های خارق‌العاده دانست (Hamkins & Lewis, 2000; Hamkins, 2002). این ماشینها علاوه بر این که توانایی انجام تعداد نامتناهی (شمارا) عمل محاسباتی را دارند، دارای ساختاری مشابه ماشینهای تورینگ معمولی هستند. به‌ویژه، در این ماشینها وضعیت هر سلول در یک لحظه از محاسبه توسط وضعیت آن سلول در مراحل قبلی محاسبه کاملاً مشخص می‌شود. این یک ویژگی لازم برای یک ماشین محاسب است. می‌توان دید که مسئلهٔ توقف برای ماشینهای تورینگ معمولی توسط ماشین‌های تورینگ نامتناهی حل‌پذیر است. در واقع، هر فرمول حسابی مرتبهٔ اول، با فرض دسترسی به ماشینهای تورینگ نامتناهی، تصمیم‌پذیر خواهد بود. البته مسائلی وجود دارند که خود این ماشینها نیز قادر به حل آنها نیستند، برای نمونه مسئلهٔ توقف برای ماشینهای تورینگ نامتناهی توسط خود این ماشینها حل نمی‌شود. می‌توان ثابت کرد که فرمول‌های تصمیم‌پذیر توسط این ماشینها در ردهٔ Δ_2^1 قرار می‌گیرند. این‌ها فرمول‌هایی هستند که در اشتراک فرمول‌های Σ_2^1 و Π_2^1 قرار دارند. فرمول‌های Σ_2^1 فرمول‌هایی از حساب مرتبهٔ دوم هستند که دارای به‌ترتیب یک سور وجودی مرتبهٔ دوم و یک سور عمومی مرتبهٔ دوم هستند و فرمول‌های Π_2^1 دوگان آنها هستند. پس می‌توان گفت که حساب مرتبهٔ دوم حتی با وجود این ماشین‌های خارق‌العاده نیز، تصمیم‌ناپذیر است. یعنی فرمول‌های مرتبهٔ دوم حسابی وجود دارند که تصمیم‌ناپذیر هستند. اما اگر خود را به حساب مرتبهٔ اول محدود کنیم، همان‌طور که گفتیم با پذیرش وجود ماشینهای تورینگ نامتناهی، مسئلهٔ حل‌ناپذیری وجود نخواهد داشت.

همان‌طور که گفته شد، ماشینهای تورینگ نامتناهی که امکان انجام بی‌نهایت عمل محاسباتی در زمان متناهی داشته باشند را می‌توان صوری‌سازی مناسبی برای ماشینهای خارق‌العاده درنظر گرفت. در حال حاضر در مورد امکان وجود چنین ماشینهای خارق‌العاده‌ای بر اساس نظریه‌های فیزیکی جدید، بحث‌هایی در جریان است. در این نوشته به موضوع امکان یا عدم‌امکان وجود فیزیکی چنین ماشینهایی نخواهیم پرداخت (Manchak & Roberts, 2022).

آیا رایانه‌های خارق‌العاده نقشی قاطع در تعیین ارزش یک گزارهٔ حسابی دارند یا نه؟ وارن (Warren) و وکسمن (Waxman) (Warren & Waxman, 2020a; Warren & Waxman, 2020b) معتقدند که وجود رایانه‌های خارق‌العاده، در مورد مسائلی از نوع فرضیهٔ گولدباخ، نقش تعیین‌کننده‌ای ندارند، زیرا این ماشینها نمی‌توانند صدق یا کذب آن فرضیه را توضیح دهند و توجیه کنند. کاری که آنها می‌کنند بررسی موردبه‌مورد همهٔ حالت‌ها است. به‌اعتقاد وارن و وکسمن یک راه ارائهٔ چنین توضیحی، ارائهٔ اثباتی در یک دستگاه اثباتی منطقی پذیرفتنی است. حساب مرتبهٔ اول پئانو، مثالی از یک چنین دستگاه اثباتی است.

می‌توان نشان داد که برخلاف ادعای وارن و وکسمن، با فرض وجود رایانهٔ خارق‌العاده و تمرکز بر مسائلی حسابی‌ای که در زبان حساب مرتبهٔ اول پئانو بیان‌پذیر هستند، جواب پرسش فوق منفی خواهد بود. برای این منظور، توجه کنید که قاعدهٔ (نامتناهی) ω در حضور رایانه‌های خارق‌العاده، موجه خواهد بود و افزودن این قاعده به حساب مرتبهٔ اول پئانو منجر به نظریه‌ای کامل (complete) خواهد شد. بنابراین در این حالت، وجود مسائل به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیر منتفی است.

قاعدهٔ ω بیان می‌کند که با فرض درستی خاصیتی به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی، آن خاصیت به‌ازای هر x درست خواهد بود. البته منظور از یک خاصیت، به سادگی، فرمولی با یک متغیر آزاد در زبان حساب مرتبهٔ اول است. پس نتیجهٔ قاعدهٔ ω در این مورد، فراتر از حکمی به‌ازای هر عدد طبیعی خواهد بود. همان‌طور که در توضیح ماشینهای تورینگ نامتناهی دیدیم، تحقیق صحت یا عدم صحت چنین فرمولی به‌ازای یک عدد طبیعی مشخص، توسط رایانهٔ خارق‌العاده امکان‌پذیر است، و همچنین رایانهٔ خارق‌العاده قادر است که همهٔ محاسبات لازم برای بررسی همهٔ حالت‌ها را در زمانی متناهی انجام دهد (منیری، ۱۴۰۱).

تردیدی که معمولاً در مورد اعتبار قواعد نامتناهی مطرح می‌شود آن است که بررسی صحت مقدمات نامتناهی آنها عملی نیست (Warren, 2021)، اما دیدیم که با فرض وجود رایانه‌های خارق‌العاده در این زمینه مشکلی وجود ندارد. بنابراین، در این حالت قاعدهٔ نامتناهی

ω پذیرفتنی به‌نظر می‌رسد. البته حتی وجود رایانه‌های خارق‌العاده، مانع از وجود مسائل حل‌ناپذیر نیست. همان‌طور که دیدیم، اگر ذهن انسان را با چنین رایانه‌هایی شبیه‌سازی کنیم نیز، مسائل مطلقاً حل‌ناپذیر وجود خواهند داشت.

۴. نتیجه‌گیری

دیدیم که همانطور که پاتنم بیان می‌کند، یک ماشین محاسب معمولی که قضایای ریاضی را فهرست می‌کند، جمله‌ای که این توانایی را بیان می‌کند را فهرست نخواهد کرد. به‌علاوه، اگر ذهن انسان توسط یک ماشین محاسب معمولی شبیه‌سازی شود، مسائلی کاملاً ریاضیاتی وجود خواهند داشت که به‌طورمطلق حل‌ناپذیرند. از طرف دیگر، با فرض امکان ساخت رایانه‌های خارق‌العاده، آنهایی که قادر به انجام بی‌نهایت عملیات حسابی در زمانی متناهی هستند، مسئلهٔ به‌طورمطلق حل‌ناپذیری، حداقل در زمینهٔ حساب مرتبهٔ اول، وجود نخواهد داشت. اما حتی اگر توانایی محاسباتی انسان را بتوان با یک رایانهٔ خارق‌العاده شبیه‌سازی کرد، مسائل حسابی مرتبهٔ دومی وجود خواهند داشت که حل‌ناپذیر خواهند بود.

تشکر

این مقاله برگرفته از سخنرانی مؤلف در دهمین همایش سالیانهٔ انجمن منطق ایران است. از برگزارکنندگان این همایش نهایت سپاس را دارم. از داور محترم مقاله نیز بابت توصیه‌های خوب نگارشی تشکر می‌کنم.

کتاب‌نامه

پاتنم، هیلری (۱۴۰۱). *هیلری پاتنم: منتخب مقاله‌های فلسفی*، تدوین کاوه لاجوردی، تهران: فرهنگ نشر نو.

منیری، مرتضی (۱۴۰۱). «آیا حساب متعیّن است؟»، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، دورهٔ ۳۱، شمارهٔ ۲، شمارهٔ پیاپی ۷۱، صص. ۹۷–۱۵۰.

Davis, Martin (1973). “Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable”, *American Mathematical Monthly*, 80, pp. 233–269.

Feferman, Solomon (2006). “Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel's Dichotomy”, *Philosophia Mathematica*, 14 (2), pp. 134-152.

Gödel, Kurt (1995). *Collected Works, Volume 3: Unpublished Essays and Lectures*, Edited by Solomon Feferman, et al. Oxford University Press.

Hamkins, J., & Lewis, A. (2000). "Infinite time Turing machines", *The Journal of Symbolic Logic,* 65 (2), pp. 567-604.

Hamkins, J. (2002). "Infinite Time Turing Machines", In: *Minds and Machines*, 12, pp. 521–539.

Penrose, Roger (1996). *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*, Oxford University Press.

Putnam, Hilary (2006). "After Gödel", *Logic Journal of the IGPL*, 14 (5), pp. 745–754.

Manchak, J. B. & Roberts, Bryan W. (2022). "Supertasks", In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.).

Shagrir, Oron (2004). "Super-tasks, accelerating Turing machines and uncomputability", *Theoretical Computer Science*, Vol. 317, 1–3, pp. 105-114.

Warren, Jared & Waxman, Daniel (2020a). "Supertasks and arithmetical truth", *Philosophical Studies*, 177, pp. 1275–1282.

Warren, J., & Waxman, D. (2020b). "A metasemantic challenge for mathematical determinacy", *Synthese*, 197 (2), pp. 477-495.

Warren, J. (2021). "Infinite Reasoning", *Philosophy and Phenomenological Research*, 103 (2), pp. 385-407.