Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol.14, No. 1, Spring and Summer 2023, 127-145
Doi: 10.30465/lsj.2023.46239.1445

An extension of the logic of proofs with actions

Fatemeh Majlesi*
Meghdad Ghari**

Abstract

Justification Logics is a family of modal logics in which the proof or justification of a necessitated proposition can be explicitly expressed. These logics can be considered as epistemic logics in which the justification (reason or evidence) for knowledge or belief of a proposition can be expressed in the language. In this paper, we study an extension of justification logics with actions. In particular, we extend the language of Artemov's logic of proofs with actions. To this end, we use the regular actions of propositional dynamic logic without the iteration operator. By combining the axiom system of the logic of proofs with that of propositional dynamic logic, we present an axiomatic proof system for this combined logic. We also present a possible world semantics, based on Kripke-Fitting models, for this combined logic, and prove the completeness theorem by means of the canonical model construction. We further establish the internalization property for this logic.

Keywords: Justification logic, Propositional dynamic logic, Internalization property, Kripke-Fitting models, completeness theorem, canonical models.

* Phd student of the Department of Philosophy, Faculty of Literature and Humanities, University of Isfahan, Isfahan, Iran, fatemeh.majlesi@ltr.ui.ac.ir

** Assistant Professor, Department of Philosophy, Faculty of Literature and Humanities, University of Isfahan, Isfahan, Iran and School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box 19395-5746, Tehran, Iran (Corresponding Author), m.ghari@ltr.ui.ac.ir

Date received: 2023/03/16, Date of acceptance: 2023/06/14

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

گسترشی از منطق اثبات‌ها با عمل‌ها

فاطمه مجلسی کوپائی*
مقداد قاری**

چکیده

منطق‌های توجیه خانواده‌ای از منطق‌ها هستند که در زبان آن‌ها می‌توان اثبات‌های ریاضی یا توجیه‌های معرفتی را بیان کرد. این منطق‌ها را می‌توان منطق‌های معرفتی در نظر گرفت که در آنها توجیه (دلیل یا شاهد) دانش یا باور به یک گزاره را می‌توان در زبان منطق بیان کرد. در این مقاله قصد داریم تأثیر افزودن عمل‌ها و کُنش‌ها به منطق‌های توجیه را بررسی کنیم. به ویژه به مطالعه منطق اثبات‌ها، که توسط آرتموف معرفی شده است، می‌پردازیم و زبان این منطق را توسط عمل‌ها گسترش می‌دهیم. برای این کار از منطق پویای گزاره‌ای استفاده می‌کنیم و عمل‌های منظم موجود در این منطق را (به جز عملگر تکرار) به زبان منطق اثبات‌ها اضافه می‌کنیم. این زبان گسترش یافته به ما امکان می‌دهد تا در مورد معرفت موجه و عمل‌ها هم‌زمان صحبت کنیم. پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی- فیتینگ برای این منطق ترکیبی، قضیه تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات می‌کنیم. همچنین برای این منطق ترکیبی خاصیت درونی‌سازی را نیز ثابت می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: منطق توجیه، منطق پویای گزاره‌ای، خاصیت درونی‌سازی، مدل‌های کریپکی- فیتینگ، قضیه تمامیت، مدل‌های کانونی.

* دانشجوی دکتری گروه فلسفه، دانشکدهٔ ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه اصفهان، fatemeh.majlesi@ltr.ui.ac.ir
** استادیار گروه فلسفه، دانشکدهٔ ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه اصفهان و محقق پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، شعبه اصفهان (نویسندهٔ مسئول)، m.ghari@ltr.ui.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۵، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۴

۱. مقدمه

منطق توجیه (Justification Logic) منطقی برای استدلال درباره اثبات‌های ریاضی و توجیه‌های معرفتی فراهم می‌کند. اولین منطق توجیهی که معرفی شده است، منطقی به نام منطق اثبات‌ها LP (Logic of Proofs) می‌باشد که توسط آرتموف در (Artemov, 1995) و (Artemov, 2001) ارائه شده است. منطق‌های توجیه گسترشی از منطق گزاره‌ها یا محمول‌ها هستند که با افزودن عبارت‌هایی به صورت $t:\varphi$ به دست می‌آیند، که در آن φ یک فرمول و t یک ترم توجیه می‌باشد. منطق‌های توجیه را می‌توان به عنوان منطق معرفتی (منطق دانش یا منطق باور) در نظر گرفت، که در این حالت عبارت $t:\varphi$ را می‌توان به صورت «t یک توجیه (یا دلیل یا شاهد) برای معرفت به φ است» تعبیر کرد. برای برخی از منطق‌های توجیه قضیه تمامیت حسابی قابل‌اثبات است و در این منطق‌ها عبارت $t:\varphi$ را می‌توان به صورت «t یک اثبات برای φ است» تعبیر کرد. در این مقاله تمرکز ما روی منطق اثبات‌هاست چرا که این منطق، اولین و معروف‌ترین منطق توجیهی است که ارایه شده است. به علاوه، LP متناظر با منطق موجه S4 است (که در بین منطق‌های موجهات منطقی پرکاربرد است) و همچنین خواص بسیاری در مقالات مختلف برای این منطق ثابت شده است؛ از جمله: قضیه تحقق (Artemov, 2001) ، تمامیت حسابی نسبت به حساب پئانو (Artemov, 2001) و همچنین نسبت به حساب کران‌دار (Goris, 2006) ، تمامیت نسبت به مدل‌های بازی (Renne, 2006) ، تمامیت نسبت به مدل‌های توپولوژی (Artemov, S., Nogina, E., 2008) و غیره.

منطق پویای گزاره‌ای PDL (propositional dynamic logic) یکی از انواع منطق‌هایی است که می‌توان در آن عمل‌ها، (یا کنش‌ها)، (actions) را به عنوان اشیایی زبانی معرفی کرد. در منطق پویای گزاره‌ای عمل‌ها با ساختاری شبیه به برنامه‌های منظم کامپیوتری (regular programs) ساخته می‌شوند. منطق PDL شامل فرمول‌هایی به صورت $[\alpha]\varphi$ است که در آن α یک عمل است. این فرمول به این صورت خوانده می‌شود: «بعد از انجام هر عمل α فرمول φ صادق است». دوگان این فرمول به صورت $\langle\alpha\rangle\varphi \overset{\text{def}}{=} \neg[\alpha]\neg\varphi$ تعریف می‌شود و به این صورت خوانده می‌شود: «اجرای خاتمه‌پذیری از عمل α موجود است که پس از آن اجرا فرمول φ صادق است». در واقع برای یک عمل α مفروض، $[\alpha]$ یک جهت (modality) ضرورت و $\langle\alpha\rangle$ یک جهت امکان است. معناشناسی این منطق بر اساس مدل‌های کریپکی است که در آن به هر عمل یک رابطه دسترس‌پذیری نظیر می‌شود. این رابطه دوتایی وضعیت‌های ورودی

(وضعیت جهان قبل از انجام عمل) و خروجی (وضعیت جهان بعد از انجام عمل) را تعیین می‌کنند.

در این مقاله قصد داریم تأثیر افزودن عمل‌ها به منطق اثبات‌ها را بررسی کنیم. ابتدا زبان منطق اثبات‌ها را توسط عمل‌های موجود در منطق PDL گسترش می‌دهیم. البته در این مقاله برای سادگی از عملگر تکرار (iteration) که در منطق PDL نقش مهمی بازی می‌کند، صرف‌نظر می‌کنیم. نام این منطق ترکیبی را JPDL می‌گذاریم. ترکیب و گسترش منطق اثبات با منطق پویا، به صورت‌بندی گزاره‌هایی که پس از رخداد یک عمل، توجیهی برای دانستن یا باور به آن گزاره داریم و یا توجیهی برای انجام عملی داریم، کمک می‌کند. برای مثال، جمله

"پس از رفتن به مطب پزشک، بنابر تشخیص و گواهی پزشک، می‌دانم که مچ دستم شکسته است"

در این منطق به صورت $[a]x{:}p$ صورت‌بندی می‌شود که اتم a به عمل رفتن به مطب دکتر اشاره دارد و گزاره p نمایش‌دهنده "مچ دستم شکسته است" می‌باشد و متغیر x بیان‌کننده توجیه "تشخیص (یا گواهی) پزشک" است. این مثال بیان‌کننده وضعیتی است که در آن پس از رخداد یک عمل توجیهی شکل گرفته است.

مثال دیگر، جمله

"می‌دانم که با استارت زدن ماشین روشن نمی‌شود، چون بنزین تمام کرده است"

در این منطق به صورت $y{:}[b]q$ صورت‌بندی می‌شود که اتم b به عمل استارت زدن و گزاره q به جمله " ماشین روشن نمی‌شود" و توجیه y به تمام شدن بنزین اشاره دارد. این مثال بیان‌کننده وضعیتی است که در آن با یک توجیه می‌توان به صدق گزاره‌ای بعد از انجام یک عمل معرفت داشت.

ابتدا برای این منطق خاصیت درونی‌سازی (internalization property) را اثبات می‌کنیم. این خاصیت بیان می‌کند که منطق JPDL قادر است اثبات‌های خود را در درون زبان خود با ترم‌های اثبات بیان کند. برخلاف برهان‌های استانداردی که برای این خاصیت وجود دارد ((Artemov, 2001) را ببینید) ما اثباتی مشابه با آنچه در (A. Baltag, B. Renne, and S. Smets, 2014) بیان شده است، ارائه می‌دهیم. این قضیه، متناظر با قاعده ضرورت در منطق موجهات است، در منطق موجهات اگر φ قضیه باشد، بنا به قاعده ضرورت $\Box\varphi$ نیز قضیه است؛ در منطق توجیه، بنا به لم درونی‌سازی، اگر φ قضیه باشد، $t{:}\varphi$ نیز قضیه است (که در آن t یک ترم توجیه است).

پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی–فیتینگ برای JPDL، قضیه سلامت و تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات می‌کنیم.

۲. ساختار نحوی منطق پویای توجیه

در این بخش ابتدا زبان منطق JPDL را معرفی کرده و سپس یک دستگاه اصل موضوعی برای آن ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲ زبان صوری

زبان منطق JPDL توسط گرامرهای زیر ساخته می‌شوند:

$$t ::= x \in \mathrm{Var} \mid c \in \mathrm{Cons} \mid c_{\overline{\alpha},\varphi} \mid t \cdot t \mid t + t \mid\, !t$$
$$\alpha ::= a \in \mathrm{At} \mid \alpha;\alpha \mid \alpha \cup \alpha \mid \varphi?$$
$$\varphi ::= p \in \mathrm{Prop} \mid \neg\varphi \mid \varphi \to \varphi \mid [\alpha]\varphi \mid t{:}\,\varphi$$

که در آن Var، Cons، At و Prop به ترتیب مجموعه‌های شمارای نامتناهی از متغیرهای توجیه، ثابت‌های توجیه، عمل‌های اتمی و متغیرهای گزارهای هستند. در گرامرهای بالا t یک ترم توجیه، α یک عمل و φ یک فرمول است. مجموعه همه ترم‌ها، همه عمل‌ها و همه فرمول‌ها را به ترتیب با Tm و Π و Φ نشان می‌دهیم. گزاره اتمی 0 نیز نشان‌دهنده تناقض است. $c_{\overline{\alpha},\varphi}$، یک شاهد متناظر با فرمول φ و دنباله‌ای از کنش‌های $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ است. ترم بسته، ترمی‌است که متغیری ندارد.

بقیه‌ی رابطهای منطق گزاره‌ها به صورت استاندارد تعریف می‌شوند، مثلا

$$\varphi \wedge \psi \coloneqq \neg(\varphi \to \neg\psi), \varphi \vee \psi \coloneqq \neg\varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi \coloneqq (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

عملگر $\cdot$ مانند قاعده وضع مقدم عمل می‌کند به این صورت که اگر t توجیهی برای $\varphi \to \psi$ و s توجیهی برای φ باشند، آنگاه $t \cdot s$ توجیهی برای ψ است. عملگر $+$ توجیه‌ها را به هم الحاق می‌کند، اگر $t{:}\,\varphi$ باشد، آنگاه $t + s$ نیز توجیهی برای φ است. عملگر $!$ درستی توجیه را چک می‌کند، پس اگر $t{:}\,\varphi$ باشد، آنگاه $!t$ توجیهی برای $t{:}\,\varphi$ است.

تعریف ۲.۲

منطق JPDL شامل اصول زیر است:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$
3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to [(\neg\psi \to \varphi) \to \psi]$
4. $[\alpha](\varphi \to \psi) \to ([\alpha]\varphi \to [\alpha]\psi)$
5. $[\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$
6. $[\alpha; \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi$
7. $[\psi?]\varphi \leftrightarrow \psi \to \varphi$
8. $s: (\varphi \to \psi) \to (t: \varphi \to (s.t): \psi)$
9. $s: \varphi \vee t: \varphi \to (s + t): \varphi$
10. $t: \varphi \to\ !t: (t: \varphi)$
11. $t: \varphi \to \varphi$

و دو قاعده وضع مقدم و قاعده تعمیم (Generalization):

$$\text{MP}: \frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$
$$\text{GEN}: \frac{\varphi}{[\alpha]\varphi}$$

تعریف ۳.۲ تخصیص ثابت (Constant Specification)

یک مجموعه تخصیص ثابت **CS** برای منطق JPDL، شامل فرمول‌هایی به صورت **c : φ** است که در آن **c** یک نماد ثابت توجیه و **φ** نمونه‌ای از اصول این منطق است. منطق JPDL_{CS} همان منطق JPDL است که در آن مجموعه فرمول‌های CS به عنوان اصل به آن اضافه شده‌اند.

تعریف ۴.۲ اصل و غیراصل‌های کنشی (Actioned axioms and actioned non-axioms)

یک اصل کنشی، فرمولی به صورت زیر است:

$$X_1X_2X_3 \ldots X_n\varphi$$

که $X_i \in \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi\}$ و φ یک اصل (اصول ۱–۱۱ تعریف ۲.۲) است. یک غیراصل کنشی، فرمولی به صورت بالاست که φ اصلی در منطق JPDL نیست و n بیشترین مقدار ممکن است، بدین معنا که φ خودش دیگر فرمولی به صورت Xψ نیست ($X \in \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi\}$ و $\psi \in \Phi$).

تعریف ۵.۲

یک تخصیص ثابت **CS** به نحو اصل‌موضوعی مناسب (Axiomatically Appropriate) است، هرگاه برای هر نمونه اصل $\boldsymbol{\varphi}$، نماد ثابت **c** وجود داشته باشد که $\mathbf{c} : \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{CS}$. یک تخصیص ثابت **CS** به نحو اصل‌موضوعی-کنشی مناسب است، هرگاه برای هر اصل کنشی $[\alpha_1][\alpha_2][\alpha_3] \dots [\alpha_n]\varphi$، شاهد $c_{\vec{\alpha},\varphi}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$c_{\vec{\alpha},\varphi}: [\alpha_1][\alpha_2][\alpha_3] \dots [\alpha_n]\varphi \in \mathbf{CS}$$

که در آن $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

این تعریف، اندرکنش توجیه و عمل را نشان می‌دهد. در واقع در تعریف زیر ما فرمول‌های **CS** را به عنوان اصل در نظر می‌گیریم و آنها را به مجموعه اصول منطق JPDL اضافه می‌کنیم. پس در منطق JPDL اصولی به صورت $c_{\vec{\alpha},\varphi}: [\alpha_1][\alpha_2][\alpha_3] \dots [\alpha_n]\varphi$ داریم، که این اصول بیانگر اندرکنش توجیه‌ها و عمل‌ها هستند. این اصول نقش مهمی در اثبات خاصیت درونی‌سازی بازی می‌کنند.

تعریف ۶.۲ اثبات در منطق $\mathbf{JPDL_{CS}}$

یک اثبات در منطق $\mathbf{JPDL_{CS}}$ یک دنباله متناهی غیرتهی π از فرمول‌هاست که هر فرمول در این دنباله یا یک نمونه جانشین از یک اصل در JPDL است، یا عضوی از **CS** است، و یا از فرمول‌های قبل از خود در این دنباله با قواعد JPDL بدست آمده است. یک سطر از اثبات در $\mathbf{JPDL_{CS}}$ فرمولی است که در این اثبات وجود دارد. برای اینکه بگوییم اثبات π در $\mathbf{JPDL_{CS}}$ متعلق به فرمول φ است، فرمول φ باید سطر آخر این اثبات باشد، و در این صورت می‌نویسیم $\vdash_{\mathbf{CS}} \varphi$ (یا به طور ساده‌تر می‌نویسیم $\vdash \varphi$). برای اشاره به طول اثبات π، یعنی تعداد سطرهای اثبات π، از نماد $|\pi|$ استفاده می‌کنیم. اگر π و π' اثبات‌هایی در منطق $\mathbf{JPDL_{CS}}$ باشند، آنگاه $\pi \subseteq \pi'$ به این معنی است که π شامل تمام سطرهای اثبات موجود در π' است.

برای اینکه بتوان خاصیت درونی‌سازی را برای منطق $\mathbf{JPDL_{CS}}$ ثابت کرد، نیاز داریم برای قاعده تعمیم ثابت کنیم که اگر ترمی بتوان برای فرمول φ به دست آورد در این صورت می‌توان ترمی برای فرمول $[\alpha]\varphi$ یافت. برای این کار از روشی که در مقاله (A. Baltag, B. Renne, and S. Smets, 2014) ارایه شده است استفاده می‌کنیم، و ابتدا تعریف و لم زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۷.۲ تعمیم-غیراصل-کنشی در اثبات‌ها

یک تعمیم–غیراصل–کنشی در یک اثبات، چون π، در منطق $\mathbf{JPDL}_{\mathrm{CS}}$ یک غیراصل کنشی است که *تنها* با قاعده تعمیم از یکی از سطرهای قبل از خود نتیجه شده است. توجه کنید که اگر یک غیراصل کنشی توسط قاعده دیگری مانند وضع مقدم در یک اثبات نتیجه شود، دیگر تعمیم–غیراصل–کنشی در آن اثبات محسوب نمی‌شود، بلکه باید در آن اثبات *تنها* توسط قاعده تعمیم به دست آمده باشد.

برای یک عدد صحیح مثبت n می‌نویسیم: $\pi \vdash_n \varphi$ به این معنا که π یک اثبات در منطق $\mathbf{JPDL}_{\mathrm{CS}}$ برای φ است که شامل حداکثر n تعمیم–غیراصل–کنشی است. می‌نویسیم $\vdash^*_{\mathbf{CS}} \varphi$ (و یا $\vdash^* \varphi$) به این معنا که πای وجود دارد که $\pi \vdash_0 \varphi$ (یعنی در π هیچ تعمیم–غیراصل–کنشی وجود ندارد).

لم ۸.۲ حذف تعمیم-غیراصل-کنشی

برای هر $\varphi \in \Phi$ داریم: $\vdash_{\mathbf{CS}} \varphi$ اگر وتنها اگر $\vdash^*_{\mathbf{CS}} \varphi$.

اثبات:

فرض کنید همه اثبات‌ها در $\mathbf{JPDL}_{\mathrm{CS}}$ با تخصیص ثابت **CS** انجام می‌شود. طرف چپ به راست بنا بر تعریف برقرار است. برای اثبات طرف دیگر کافی است نشان دهیم که $\pi \vdash_n \varphi$، برای یک عدد صحیح مثبت n، مستلزم این است که π_*ای وجود دارد که $\pi \supseteq \pi_*$ و $\pi_* \vdash_0 \varphi$. این اثبات را با استقرا روی n (تعداد تعمیم–غیراصل–کنشی) و زیراستقرا روی $|\pi|$ (تعداد سطرهای اثبات) انجام می‌دهیم. فرض کنید $\pi \vdash_n \varphi$.

گام اول استقرا: اگر $n = 0$ باشد، با در نظر گرفتن $\pi = \pi_*$ نتیجه حاصل می‌شود.

گام استقرا: فرض می‌کنیم $n > 0$ و نتیجه برای حداکثر $n - 1$ تعداد تعمیم–غیراصل–کنشی برقرار است (فرض استقرا)؛ باید نشان دهیم برای $\pi \vdash_n \varphi$ (یعنی با nبار تعمیم–غیراصل–کنشی) نیز π_*ای وجود دارد که $\pi \supseteq \pi_*$ و $\pi_* \vdash_0 \varphi$. زیراستقرا را روی طول اثبات پیش می‌بریم:

گام اول زیراستقرا: اگر $|\pi| = 1$ باشد. از آنجاکه π تنها شامل یک سطر است پس φ اصل است یا عضوی از **CS** است و لذا داریم: $\pi \vdash_0 \varphi$. قرار دهید $\pi = \pi_*$، پس داریم $\pi \supseteq \pi_*$ و $\pi_* \vdash_0 \varphi$.

گام زیراستقرا: فرض می‌کنیم که نتیجه برای تعداد سطر کمتر از $|\pi|$، برقرار است (فرض زیراستقرا)؛ باید نشان دهیم نتیجه برای دقیقا $|\pi|$ سطر برقرار است: پس فرض می‌کنیم $\pi \nvdash_0 \varphi$. پس در اثبات π حداقل یک تعمیم–غیراصل–کنشی وجود دارد:

$$\pi = \theta_1, \dots, \theta_{|\pi|-1}, \varphi$$

فرض کنید π' کوتاه‌ترین زیراثبات ممکن از π است که سطر آخر آن $[\alpha]\theta_m$، برای یک عمل $[\alpha]$، یک تعمیم–غیراصل–کنشی است:

$$\pi' = \theta_1, \dots, \theta_{|\pi'|-1}, [\alpha]\theta_m$$

چنین اثبات π' غیرتهی موجود است چرا که طبق فرض، در اثبات π حداقل یک تعمیم–غیراصل–کنشی وجود دارد. پس یا π' یک زیرمجموعه سره از π است و یا $\pi = \pi'$. هر حالت را جداگانه در نظر می‌گیریم:

فرض کنید π' یک زیرمجموعه سره از π است، پس $|\pi'| < |\pi|$. و می‌توانیم π را چنین بنویسیم $\pi = \pi'\#\sigma$ ("#" به الحاق (concatenation) سطرهای اثبات به هم اشاره دارد) که σ یک دنباله متناهی غیرتهی از فرمول‌هاست. پس می‌توان فرض زیراستقرا را روی این دو بخش اعمال کرد: یک π'_* وجود دارد که $\pi'_* \supseteq \pi'$ و $\pi'_* \vdash_0 [\alpha]\theta_m$. پس π'_* اثباتی برای $[\alpha]\theta_m$ است که تمامی سطرهای اثبات π' را دارد و شامل هیچ تعمیم–غیراصل–کنشی نیست. پس $\pi'_*\#\sigma$ نیز اثباتی برای φ است که تمام سطرهای اثبات $\pi = \pi'\#\sigma$ را دارد و حداکثر شامل $n-1$ تعداد تعمیم–غیراصل–کنشی است. یعنی $\pi'_*\#\sigma \vdash_{n-1} \varphi$ و $\pi'_*\#\sigma \supseteq \pi'\#\sigma = \pi$. با اعمال فرض استقرا، اثباتی چون π_* وجود دارد که $\pi_* \supseteq \pi'_*\#\sigma \supseteq \pi'\#\sigma = \pi$ و $\pi_* \vdash_0 \varphi$.

در حالت دوم، فرض کنیم $\pi = \pi'$. با توجه به تعریف π' (کوچکترین زیراثبات از π که آخرین سطر آن یک تعمیم–غیراصل–کنشی است) داریم: $\pi \vdash_1 \varphi$ و $\varphi = [\alpha]\theta_m$. پس باید خود θ_m یک غیراصل کنشی باشد که از اعمال قاعده وضع مقدم روی فرمول‌هایی چون θ_n و $\theta_n \to \theta_m$ قبل از سطر m در π بدست آمده است. پس π چنین صورتی دارد:

$$\pi = \sigma\#\theta_m\#\tau\#[\alpha]\theta_m$$

که در آن θ_n و $\theta_n \to \theta_m$ هر دو در σ هستند. σ و τ هر دو دنباله‌های متناهی (احتمالا تهی) از فرمول‌ها هستند. از آنجا که $[\alpha]\theta_m$ از قاعده تعمیم بدست آمده است، می‌توانیم اثبات‌هایی چون:

$$\pi''_1 = \sigma\#[\alpha]\theta_n, \qquad |\pi''_1| \leq m \leq |\pi| - 1$$
$$\pi''_2 = \sigma\#[\alpha](\theta_n \to \theta_m), \qquad |\pi''_2| \leq m \leq |\pi| - 1$$

بسازیم که حداکثر یک تعمیم-غیراصل-کنشی را دارا باشند. پس $\pi_1'' \vdash_1 [\alpha]\theta_n$ و $\pi_2'' \vdash_1 [\alpha](\theta_n \to \theta_m)$. از آنجا که $|\pi| > |\pi_1''|$ و $|\pi| > |\pi_2''|$ با فرض زیراستقرا، $\pi_*^1 \supseteq \pi_1''$ و $\pi_*^2 \supseteq \pi_2''$ موجودند بطوریکه $\pi_*^1 \vdash_0 [\alpha]\theta_n$ و $\pi_*^2 \vdash_0 [\alpha](\theta_n \to \theta_m)$. به کمک نمونه اصل ۴ $([\alpha](\theta_n \to \theta_m) \to ([\alpha]\theta_n \to [\alpha]\theta_m))$، دنباله

$$\pi_* = \pi_*^1 \# \pi_*^2 \# \theta_m \# \tau \# [\alpha](\theta_n \to \theta_m) \to ([\alpha]\theta_n \to [\alpha]\theta_m) \# [\alpha]\theta_m$$

اثباتی برای $\varphi = [\alpha]\theta_m$ است که شامل تمام سطرهای π است اما تعمیم-غیراصل-کنشی ندارد. پس $\pi_* \vdash_0 \varphi$.

مثال ۹.۲

اثبات زیر را در نظر بگیرید:

$\vdash [\alpha](\varphi \to \varphi)$

1. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ اصل (1)
2. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ اصل (1)
3. $\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ اصل (2)
4. $\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)$ قاعده وضع مقدم (2,3)
5. $\varphi \to \varphi$ قاعده وضع مقدم (1,4)
6. $[\alpha](\varphi \to \varphi)$ قاعد تعمیم (5)

در اثبات فوق با یک بار استفاده از قاعده تعمیم، نتیجه را از سطر ۵ بدست می‌آوریم. با کمک لم حذف کنش، این اثبات به صورت زیر قابل بازنویسی است، به نحوی که نتیجه اثبات توسط قاعده وضع مقدم و استعمال قاعده تعمیم روی اصول، بدست می‌آید.

1. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ اصل (1)
2. $[\alpha]\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big)$ قاعده تعمیم (1)
3. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ اصل (1)
4. $[\alpha](\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ قاعده تعمیم (3)
5. $\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ اصل (2)
6. $[\alpha][\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))]$ قاعده تعمیم (5)
7. $[\alpha]\Big\{\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to \Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big)\Big\} \to \Big\{[\alpha]\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to [\alpha]\Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big)\Big\}$ اصل (4)

$8. [\alpha]\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to$
$[\alpha]\Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big)$ قاعده وضع مقدم$(6,7)$

$9. [\alpha]\Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big)$ قاعده وضع مقدم$(4,8)$

$10. [\alpha]\Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big) \to \{[\alpha]\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to [\alpha](\varphi \to$
$\varphi)\}$ اصل(4)

$11. [\alpha]\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to [\alpha](\varphi \to \varphi)$ قاعده وضع مقدم$(9,10)$

$12. [\alpha](\varphi \to \varphi)$ قاعده وضع مقدم$(2,11)$

توجه کنید که در اثبات دوم هم سه بار قاعده تعمیم به کار رفته است، اما این قاعده‌ها تنها روی اصول به کار رفته‌اند. بنابراین، در اثبات دوم هیچ غیراصل کنشی نداریم.

در اینجا خاصیت درونی‌سازی که یکی از مهم‌ترین خواص منطق‌های توجیه است را ثابت می‌کنیم. این خاصیت بیان می‌کند که منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ قادر است اثبات‌های خود را در درون زبان خود بیان کند، یعنی اگر فرمولی چون φ در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ ثابت شود، در این صورت ترمی مانند t وجود دارد به طوری که این ترم همان اثبات فرمول φ را در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ بیان می‌کند. اثبات این خاصیت شبیه اثباتی است که در (A. Baltag, B. Renne, and S. Smets, 2014) ارائه شده است.

لم ۱۰.۲ درونی‌سازی (Internalization)

فرض کنید تخصیص ثابت CS به نحو اصل‌موضوعی و اصل‌موضوعی- کنشی مناسب باشد. اگر $\vdash_{\mathbf{cs}} \varphi$ آنگاه ترم بسته مانند t وجود دارد که $\vdash_{\mathbf{cs}} t{:}\varphi$.

اثبات:

با توجه به لم حذف کنش کافی است نشان دهیم که اگر $\vdash^*_{\mathbf{cs}} \varphi$ آنگاه ترم منطقی مانند t وجود دارد که $\vdash^*_{\mathbf{cs}} t{:}\varphi$. فرض کنید $\vdash^*_{\mathbf{cs}} \varphi$. با استقرا روی اثبات φ، ترم مناسب t را پیدا می‌کنیم.

اگر φ یک اصل باشد، چون CS به نحو اصل‌موضوعی مناسب است، نماد ثابت $\acute{c}$ وجود دارد به طوری که $\acute{c} : \varphi \in \mathbf{CS}$.

اگر $\varphi \in \mathbf{CS}$ باشد، صورتی چون $\varphi = c{:}\psi$ (یا $c_{\overline{\alpha},\varphi}{:}[\alpha_1][\alpha_2][\alpha_3] \dots [\alpha_n]\psi$) دارد. با توجه به اصل ۱۱، ترم $!c$ (یا $!c_{\overline{\alpha},\varphi}$) شاهدی برای φ است.

اگر φ نتیجه قاعده وضع‌مقدم ($\omega \to \varphi$ و ω) باشد، طبق فرض استقرا $\vdash^*_{\mathbf{cs}}\, a{:}(\omega \to \varphi)$ و $\vdash^*_{\mathbf{cs}}\, b{:}\omega$. طبق اصل $(s{:}(\varphi \to \psi) \to (t{:}\varphi \to (s.t)\psi))$، می‌توان نتیجه گرفت:

$\vdash^*_{\mathbf{cs}}\,(a.b){:}\varphi$

اگر φ یک اصل کنشی باشد ($[\alpha_1][\alpha_2][\alpha_3]\dots[\alpha_n]\psi$) که توسط قاعده تعمیم به دست آمده است، آنگاه چون **CS** به نحو اصل‌موضوعی-کنشی مناسب است، ثابتی چون $c_{\vec{\alpha},\varphi}$ وجود دارد که $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ و $c_{\vec{\alpha},\varphi}{:}\varphi$ در **CS** است.

۳. ساختار معنایی

در این بخش به معرفی معناشناسی منطق **JPDL**$_{\mathrm{CS}}$ می‌پردازیم. معناشناسی این منطق ترکیبی است از معناشناسی مدل‌های کریپکی منطق پویای گزاره‌ای (رجوع کنید به (Harel, D., Kozen, D., Tiuryn, Jerzy, 2000)) و ترکیبی است از مدل‌های فیتینگ منطق اثبات‌ها می‌باشد (برای مدل‌های فیتینگ رجوع کنید به (Fitting, 2005)).

تعریف ۱.۳

مدل کریپکی- فیتینگ $M =< K, m_{\mathfrak{R}}, R, \mathcal{E} >$ برای منطق **JPDL**$_{\mathrm{CS}}$ یک چندتایی است که در آن K یک مجموعه غیرتهی از وضعیت‌ها (states) است. $m_{\mathfrak{R}}$ یک تابع معنا (meaning function) است که به هر فرمول یک زیرمجموعه از K را و به هر برنامه یک رابطه دوتایی روی K نسبت می‌دهد،تابع شاهد $\mathcal{E}$ که هر دوتایی ترم و فرمول را به یک وضعیت در K نسبت می‌دهد و رابطه دسترس‌پذیری R یک رابطه دوتایی روی وضعیت‌هاست:

$$m_{\mathfrak{R}}(\varphi) \subseteq K$$
$$m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \subseteq K \times K$$
$$\mathcal{E}(t,\varphi) \subseteq K$$
$$R(u) = \{v \in K | vRu\}$$

که تابع $\mathcal{E}$ در شرایط زیر برقرار است:

1. $uRv\ \&\ u \in \mathcal{E}(t,\varphi) \Rightarrow v \in \mathcal{E}(t,\varphi)$
2. $u \in \mathcal{E}(t,\varphi) \Rightarrow u \in \mathcal{E}(!t, t{:}\varphi)$
3. $\mathcal{E}(s, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{E}(t,\varphi) \subseteq \mathcal{E}(s.t, \psi)$
4. $\mathcal{E}(s,\varphi) \cup \mathcal{E}(t,\varphi) \subseteq \mathcal{E}(s+t, \varphi)$
5. $c{:}\varphi \in CS \Rightarrow \mathcal{E}(c,\varphi) = K$
6. $c_{\vec{\alpha},\varphi}{:}[\vec{\alpha}]\varphi \in CS \Rightarrow \mathcal{E}(c_{\vec{\alpha},\varphi}, [\vec{\alpha}]\varphi) = K.$

رابطه R یک رابطه دوتایی روی وضعیت هاست که uRv دسترس‌پذیری وضعیت u به وضعیت v را نشان می‌دهد، و به این معناست که وقتی در وضعیت u هستیم (یعنی فرض می‌کنیم وضعیت u جهان واقع است) وضعیت v، از لحاظ معرفتی، یک وضعیت ممکن است.

مجموعه $m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ یک زیرمجموعه از وضعیت‌های K است که در آن φ صادق است.

رابطه $m_{\mathfrak{R}}(\alpha)$، یک رابطه دوتایی است که برای عمل α شامل زوجهای (ورودی، خروجی) از وضعیت‌ها هستند. اگر $(u,v) \in m_{\mathfrak{R}}(\alpha)$ باشند، u وضعیت ورودی و v وضعیت خروجی بعد از اجرای عمل α است.

مجموعه $\mathcal{E}(t,\varphi)$ وضعیت‌هایی را نشان می‌دهد که در آنها t یک توجیه مرتبط و قابل‌قبول برای φ است.

تعریف ۲.۳ قواعد معناشناسی

I. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi \rightarrow \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (K - m_{\mathfrak{R}}(\varphi)) \cup m_{\mathfrak{R}}(\psi)$

II. $m_{\mathfrak{R}}([\alpha]\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} K - (m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ (K - m_{\mathfrak{R}}(\varphi))$
$= \{u | \forall v \text{ if } (u,v) \in m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \text{ then } v \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$

III. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha;\beta) \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ m_{\mathfrak{R}}(\beta)$
$= \{(u,v) | \exists w \in K\ (u,w) \in m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \text{ and } (w,v) \in m_{\mathfrak{R}}(\beta)\}$

IV. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha \cup \beta) \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \cup m_{\mathfrak{R}}(\beta)$

V. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi?) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u,u) | u \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$

VI. $m_{\mathfrak{R}}(t{:}\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(t,\varphi) \cap \{u | R(u) \subseteq m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$

تعریف ۳.۳ اعتبار

فرمولی مانند φ در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر است به این معنا که در هر مدل $M =< K, m_{\mathfrak{R}}, R, \mathcal{E} >$ و هر وضعیت u در K، u در $m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ باشد (به عبارت دیگر، $m_{\mathfrak{R}}(\varphi) = K$). فرمولی مانند φ با فرضیات Σ در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر است به این معنا که در هر مدل $M =< K, m_{\mathfrak{R}}, R, \mathcal{E} >$ و هر وضعیت u در K، اگر برای هر $\psi \in \Sigma$، u در $m_{\mathfrak{R}}(\psi)$ باشد، آنگاه u در $m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ باشد.

۴. تمامیت

در این بخش قضیه سلامت (Soundness) و تمامیت (Completeness) را با استفاده از مدل‌های کانونی ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۴ سلامت.

اگر فرمول F در $\mathbf{JPDL}_{CS}$ اثبات‌پذیر باشد آنگاه F در $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر است.

اثبات:

باید نشان دهیم اصول منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر هستند و قواعد این منطق اعتبار را حفظ می‌کنند. از آنجا که اصول این منطق، ترکیبی از اصول منطق اثبات‌ها و منطق پویاست، اثبات اعتبار این اصول مشابه با آنچه در (Fitting, 2005) و (D. Harel, D. Kozen, Jerzy. Tiuryn, 2000) ارایه شده است می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم اصل کنشی $c_{\alpha,\varphi}:[\alpha]\varphi \in \mathbf{CS}$ در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر است (برای سادگی اثبات، اصل کنشی را تنها با یک عمل در نظر گرفته‌ایم، حکم برای تعداد متناهی عمل مشابه است). اگر φ یک اصل باشد، در هر مدل $M =< K, m_{\mathfrak{R}}, R, \mathcal{E} >$ داریم $m_{\mathfrak{R}}(\varphi) = K$. باید نشان دهیم u در $m_{\mathfrak{R}}(c_{\alpha,\varphi}:[\alpha]\varphi)$ است. از آنجا که اگر $c_{\alpha,\varphi}:[\alpha]\varphi \in CS$ آنگاه $\mathcal{E}(c_{\alpha,\varphi},[\alpha]\varphi) = K$ (بنا به شرط ۶ از تابع $\mathcal{E}$) در نتیجه داریم که $u \in \mathcal{E}(c_{\alpha,\varphi},[\alpha]\varphi)$. از طرفی دیگر، چون $u \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi) = K$. پس طبق تعریف (VI)، $u \in m_{\mathfrak{R}}(c_{\alpha,\varphi}:[\alpha]\varphi)$ است.

تعریف ۲.۴ مدل کانونی

مدل کانونی $M^{\mathfrak{R}} =< N, m_{\mathfrak{R}}, R_{\mathfrak{R}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{R}} >$ برای منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

N یک مجموعه از تمام مجموعه‌های $\mathbf{JPDL}_{CS}$ سازگار ماکزیمال از فرمول‌هاست.

$$R_{\mathfrak{R}}(u,v) \iff u^{\#} = \{\varphi | t{:}\varphi \in u \text{ for some } t\} \subseteq v$$
$$m_{\mathfrak{R}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{u | \varphi \in u\}$$
$$m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u,v) | (\forall\varphi), \varphi \in v \Rightarrow \langle\alpha\rangle\varphi \in u\} = \{(u,v) | (\forall\varphi), [\alpha]\varphi \in u \Rightarrow \varphi \in v\}$$
$$\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(t,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{u | t{:}\varphi \in u\}$$

لم ۳.۴

مدل کانونی $M^{\mathfrak{R}} =< N, m_{\mathfrak{R}}, R_{\mathfrak{R}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{R}} >$ یک مدل برای منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$است.

اثبات: باید نشان دهیم $R_{\mathfrak{R}}$ متعدی و انعکاسی است. اثبات مشابه با اثباتی است که در (Fitting, 2005) بیان شده است. بنابراین جزییات آن در اینجا حذف می‌شود. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$ در شروط ۱–۵ از تعریف ۳.۱ صدق می‌کنند. چون اثبات مشابه با اثباتی است که در (Fitting, 2005) بیان شده است فقط یک شرط برای نمونه در اینجا بررسی می‌شود.

$uR_{\mathfrak{N}}v \,\&\, u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi) \Rightarrow v \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$

طبق تعریف چون $uR_{\mathfrak{N}}v$ آنگاه $u^{\#} \subseteq v$ و چون $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$ پس $t{:}\varphi \in u$. از طرفی طبق اصول داریم:$t{:}\varphi \to\, !t{:}(t{:}\varphi)$ و چون u مجموعه ماکزیمال است، پس $!t{:}(t{:}\varphi) \in u$ و طبق تعریف این یعنی $t{:}\varphi \in u^{\#}$ و این نتیجه می‌دهد که $t{:}\varphi \in v$. پس $v \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$.

اثبات:

باید نشان دهیم مدل کانونی $M^{\mathfrak{N}} =< N, m_{\mathfrak{N}}, R_{\mathfrak{N}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{N}} >$ به همراه CS یک مدل برای منطق ماست. ابتدا باید نشان دهیم $R_{\mathfrak{N}}$ متعدی است. یعنی اگر $uR_{\mathfrak{N}}v$ و $vR_{\mathfrak{N}}w$ آنگاه $uR_{\mathfrak{N}}w$.

از تعریف دسترس‌پذیری در مدل کانونی استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم: $u^{\#} \subseteq v$ و $v^{\#} \subseteq w$. حال اگر $\varphi \in u^{\#}$ آنگاه طبق تعریف $t{:}\varphi \in u$. از طرفی طبق اصول داریم:$t{:}\varphi \to\, !t{:}(t{:}\varphi)$ و چون u مجموعه ماکزیمال است، پس $!t{:}(t{:}\varphi) \in u$ و طبق تعریف این یعنی $t{:}\varphi \in u^{\#}$ و این نتیجه می‌دهد که $t{:}\varphi \in v$ پس $\varphi \in v^{\#} \subseteq w$. پس $R_{\mathfrak{N}}$ متعدی است.

در ادامه نشان می‌دهیم $R_{\mathfrak{N}}$ انعکاسی است. یعنی برای هر $u \in N$، $uR_{\mathfrak{N}}u$.

از تعریف دسترس‌پذیری در مدل کانونی استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم: $u^{\#} \subseteq u$. حال اگر $\varphi \in u^{\#}$ آنگاه طبق تعریف $t{:}\varphi \in u$. از طرفی طبق اصول داریم: $t{:}\varphi \to \varphi$ و چون u مجموعه ماکزیمال پر است، پس $\varphi \in u$ و $R_{\mathfrak{N}}$ انعکاسی است.

حال نشان می‌دهیم شروط $\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}$ برقراراند:

$uR_{\mathfrak{N}}v \,\&\, u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi) \Rightarrow v \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$

طبق تعریف چون $uR_{\mathfrak{N}}v$ آنگاه $u^{\#} \subseteq v$ و چون $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$ پس $t{:}\varphi \in u$. از طرفی طبق اصول داریم: $t{:}\varphi \to\, !t{:}(t{:}\varphi)$ و چون u مجموعه ماکزیمال پر است، پس $!t{:}(t{:}\varphi) \in u$ و طبق تعریف این یعنی $t{:}\varphi \in u^{\#}$ و این نتیجه می‌دهد که $t{:}\varphi \in v$. پس $v \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$.

$u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi) \Rightarrow u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(!t, t{:}\varphi)$

اگر $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$ پس $t{:}\varphi \in u$. از طرفی طبق اصول داریم: $t{:}\varphi \to\, !t{:}(t{:}\varphi)$ و چون u مجموعه ماکزیمال پر است، پس $!t{:}(t{:}\varphi) \in u$ که نتیجه می‌دهد $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(!t, t{:}\varphi)$.

$\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s.t, \psi)$

اگر $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$ و $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s, \varphi \to \psi)$ آنگاه $t{:}\varphi \in u$ و $s{:}\varphi \to \psi \in u$ از طرفی طبق اصول داریم: $s{:}(\varphi \to \psi) \to (t{:}\varphi \to (s.t)\psi)$ و چون u مجموعه ماکزیمال پر است، پس به کمک قاعده وضع مقدم نتیجه می‌گیریم $(s.t)\psi \in u$ که نتیجه می‌دهد $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s.t, \psi)$.

$\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s,\varphi) \cup \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(s+t,\varphi)$

اگر $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(t, \varphi)$ یا $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(s, \varphi)$ آنگاه $t: \varphi \in u$ و $s: \varphi \in u$ از طرفی طبق اصول داریم: $s: \varphi \to (s + t)\varphi$ و چون u مجموعه ماکزیمال است، پس به کمک قاعده وضع مقدم نتیجه می‌گیریم $(s + t)\varphi \in u$ که نتیجه می‌دهد $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(s + t, \varphi)$.

$u \in \mathcal{E}(c_{\{\alpha,\varphi\}}, [\alpha]\varphi)$

برای تمام $\alpha \in \mathrm{Atom}$ و φای که یک اصل است. اگر $u \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(c_{\{\alpha,\varphi\}}, [\alpha]\varphi)$ نباشد، یعنی $u \nvdash c_{\{\alpha,\varphi\}}: [\alpha]\varphi$ را که چون φ اصل است، با ماکزیمال پر بودن u در تناقض است و لذا داریم: $u \in \mathcal{E}(c_{\{\alpha,\varphi\}}, [\alpha]\varphi$.

ویژگی‌ها:

اگر N یک مجموعه سازگار ماکزیمال از فرمول‌های منطق $\mathbf{JPDL}_{\mathrm{CS}}$ باشد، آنگاه:

i. برای هر فرمول φ: $\varphi \in N$ یا $\neg\varphi \in N$.

ii. برای هر فرمول φ و ψ: $\varphi \wedge \psi \in N$ اگر و تنها اگر $\varphi \in N$ و $\psi \in N$.

iii. برای هر فرمول φ و ψ: $\varphi \vee \psi \in N$ اگر و تنها اگر $\varphi \in N$ یا $\psi \in N$.

iv. برای هر فرمول φ و ψ: $\varphi \supset \psi \in N$ اگر و تنها اگر $\varphi \notin N$ یا $\psi \in N$.

v. N، تحت قاعده وضع مقدم بسته است: اگر $\varphi, (\varphi \to \psi) \in N$ ، آنگاه $\psi \in N$.

لم ۴.۴

در مدل کانونی $\mathbf{M}^{\mathfrak{R}}$ داریم:

i. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi \to \psi) = (N - m_{\mathfrak{R}}(\varphi)) \cup m_{\mathfrak{R}}(\psi)$
ii. $m_{\mathfrak{R}}([\alpha]\varphi) = N - (m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ (N - m_{\mathfrak{R}}(\varphi))$
iii. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha; \beta) = m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ m_{\mathfrak{R}}(\beta)$
iv. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha \cup \beta) = m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \cup m_{\mathfrak{R}}(\beta)$
v. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi?) = \{(u, u) | u \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$
vi. $m_{\mathfrak{R}}(t: \varphi) = \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(t, \varphi) \cap \{u | (\forall v), (u, v) \in R_{\mathfrak{R}} \implies v \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$

برهان. اثبات بندهای $i - v$ را می‌توان در کتاب (Harel, D., Kozen, D., Tiuryn, Jerzy, 2000) یافت. در اینجا فقط بند vi اثبات می‌شود.

اگر $u \in m_{\mathfrak{R}}(t: \varphi)$ آنگاه طبق تعریف $t: \varphi \in u$ و با توجه به تعریف $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$، $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(t, \varphi)$. حال اگر vای را در نظر بگیریم که $uR_{\mathfrak{R}}v$، طبق تعریف $R_{\mathfrak{R}}$، چون $t: \varphi \in u$ پس $\varphi \in v$ که همان $v \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ است. اگر

$u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(t, \varphi) \cap \{u | (\forall v), (u, v) \in R_{\mathfrak{R}} \implies v \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\} = \{u \in N | t: \varphi \in u\}$

طبق تعریف $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}$، $u \in \{\Gamma | t{:}\varphi \in \Gamma\}$. پس $t{:}\varphi \in u$ و طبق تعریف: $u \in m_{\mathfrak{R}}(t{:}\varphi)$.

قضیه ۵.۴ تمامیت.

اگر فرمول F در $\mathbf{JPDL}_{CS}$ معتبر باشد آنگاه F در $\mathbf{JPDL}_{CS}$ اثبات‌پذیر است.

اثبات. فرض می‌کنیم F در $\mathbf{JPDL}_{CS}$ اثبات پذیر است. پس مجموعه $\{\neg F\}$ سازگار است. و طبق قضیه لیندبائم این مجموعه قابل گسترش به یک مجموعه سازگار ماکزیمال Γ است. چون F در Γ است. طبق تعریف داریم: $\Gamma \in m_{\mathfrak{R}}(\neg F)$ که طبق تعریف ما از اعتبار به این معنی است که تحت Γ، $\neg F$ در این منطق معتبر است و این با فرض ما در تناقض است. پس تمامیت اثبات می‌شود.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله منطقی به نام $\mathbf{JPDL}_{CS}$ ارائه کردیم که ترکیبی از منطق اثبات‌ها و بخشی از منطق پویای گزاره‌ای است. پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی- فیتینگ برای $\mathbf{JPDL}_{CS}$ ، قضیه تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات کردیم. همچنین خاصیت درونی‌سازی را برای این منطق ثابت کردیم. در گام بعدی قصد داریم زبان منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ را توسط عملگر تکرار که در منطق PDL نقش مهمی بازی می‌کند گسترش دهیم و قضیه تمامیت را برای آن منطق ثابت کنیم. همچنین قصد داریم عملگرهای منطق تکلیف از جمله باید، مجاز و ممنوع را در منطق $\mathbf{JPDL}_{CS}$ تعریف کرده و به بررسی پارادوکس‌های منطق تکلیف در آن بپردازیم.

تشکر و قدردانی

مقداد قاری این مقاله را تحت حمایت مالی پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانشهای بنیادی در شعبه اصفهان انجام داده است (کد طرح پژوهشی: ۱۴۰۲۰۳۰۳۱۳)

کتاب‌نامه

Artemov, S. (1995). *Operational modal logic* (Issue Technical Report MSI 95--29.

Artemov, S. (2001). Explicit Provability and Constructive Semantics. *Bulletin of Symbolic Logic*, 7(1), 1–36.

Artemov, S., & Nogina, E. (2008). The topology of justification. *Logic and Logical Philosophy*, 17(1–2), 59–71. https://doi.org/10.12775/LLP.2008.005

Baltag, A., Renne, B., & Smets, S. (2014). The logic of justified belief, explicit knowledge, and conclusive evidence. *Annals of Pure and Applied Logic*, 165(1), 49–81.

https://doi.org/10.1016/j.apal.2013.07.005

Fitting, M. (2005). The logic of proofs, semantically. *Annals of Pure and Applied Logic*, 132(1), 1–25. https://doi.org/10.1016/j.apal.2004.04.009

Goris, E. (2006). Logic of Proofs for Bounded Arithmetic. In D. Grigoriev, J. Harrison, & E. A. Hirsch (Eds.), Computer Science - *Theory and Applications, First International Computer Science Symposium in Russia, CSR~2006, St.~Petersburg, Russia, June 8--12, 2006, Proceedings* (Vol. 3967, pp. 191–201). Springer. https://doi.org/10.1007/11753728_21

Harel, D., Kozen, D., & Tiuryn, Jerzy. (2000). *Dynamic logic*. MIT Press.

Renne, B. (2006). Propositional Games with Explicit Strategies. In G. Mints & R. de Queiroz (Eds.), *Proceedings of the 13th Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2006), Stanford University, CA, USA, 18--21 July 2006* (Vol. 165, pp. 133–144). Elsevier. https://doi.org/10.1016/j.entcs.2006.05.042