Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 15, No. 2, Autumn and Winter 2024-2025, 27-47
https://www.doi.org/10.30465/lsj.2025.47895.1457

Provability of Hindman-Schur and Hindman-Brauer in Peano Arithmetic

Amir Khamseh*

Abstract

Hindman's Theorem states that for every coloring of natural numbers $\mathbb{N}$ with finitely many colors, there is an infinite set H such that the set of numbers which can be written as a sum of distinct elements of H is monochromatic. On the other hand, Brauer's Theorem states that for all $r, l, s \geq 1$, there exists $t = t(r, l, s)$ such that if the interval $[1, t]$ is r-colored then there exists $a, b > 0$ such that the set $\{a, b, a + b, a + 2b, \dots, a + (l - 1)b\} \subseteq [1, t]$ is monochromatic. If A and B are sets, $FS^A(B)$ is the set of all sums of j-many distinct elements of B, for all $j \in A$. Hindman-Brauer Theorem is the following statement: for every r-coloring of the set of natural numbers $\mathbb{N}$, there is an infinite set $H \subseteq \mathbb{N}$ and $a, b > 0$ such that $FS^{\{a,b,a+b,a+2b,\dots,a+(l-1)b\}}$ is monochromatic. In this paper, we study the finite version of Hindman-Brauer Theorem and also Hindman-Schur Theorem and show that these results are provable in first order Peano Arithmetic. Also, we will see that these results are provable if we consider the apartness condition.

Keywords: Provability; Peano Arithmetic; Hindman Theorem, Brauer Theorem, Schur Theorem,; Ramsey Theorem.

* Assistant Professor, Faculty of Mathematical Sciences, Kharazmi University, amirkhamseh114@gmail.com
Date received: 21/11/2024, Date of acceptance: 23/02/2025

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ پژوهشی)، سال ۱۵، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

اثبات‌پذیری قضیهٔ هیندمن شور و هیندمن برائر در حساب پئانو

امیر خمسه*

چکیده

قضیه هیندمن بیان می‌کند که برای هر افراز از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به تعداد متناهی بخش، یک زیر مجموعه نامتناهی از اعداد طبیعی وجود دارد که همه مجموع‌های متناهی از اعضای متمایز این زیر مجموعه، عضو یک بخش مشخصی از افراز باشند. همچنین قضیه شور بیان می‌کند که برای هر افراز از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به تعداد متناهی بخش، حداقل یکی از بخش‌های افراز وجود دارد که شامل سه عدد x, y, z است که $x + y = z$ قضیه برائر شبیه قضیه شور است با این تفاوت که به جای جواب برای معادله $x + y = z$ حداقل یکی از بخش‌های افراز شامل تصاعد حسابی به صورت $\{a, a + b, a + 2b, \dots, a + (l - 1)b\}$ باشد. در این مقاله، اثبات پذیری قضیه هیندمن شور و هیندمن برائر را در حساب مرتبه اول پئانو مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نسخه متناهی این قضایا در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیر است. در ادامه خواهیم دید که با اضافه شدن شرط مجزا بودن هم نتایج در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیر باقی می‌ماند.

کلیدواژه‌ها: اثبات پذیری، حساب پئانو، قضیه هیندمن، قضیه برائر، قضیه شور، قضیه رمزی، قضیه پاریس هرینگتون.

* استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه خوارزمی، khamseh@khUl.AC.IR

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۰۵

۱. مقدمه

حساب مرتبه اول که اغلب حساب پئانو نیز نامیده می‌شود یک سیستم اصل موضوعی برای بررسی خواص و رفتار اعداد طبیعی است. این اصول شامل خاصیت‌های ابتدایی و اولیه جمع و ضرب اعداد طبیعی به علاوه اصل استقراء است. در حساب مرتبه اول سورها به اعداد طبیعی محدود شده‌اند به همین دلیل قدرت بیان عبارت‌هایی در مورد اعداد طبیعی را دارند. این محدودیت که سورها نمی‌توانند به زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی اشاره کنند قدرت بیان حساب مرتبه اول را کم می‌کند ولی از منظر سازگاری و کامل بودن آن را خوش رفتار می‌کند. حساب مرتبه دوم تعمیم حساب مرتبه اول است، به این صورت که اجازه می‌دهیم سورها علاوه بر اعداد به مجموعه‌ای از اعداد نیز اشاره کنند. در نتیجه حساب مرتبه دوم قدرت بیان عبارت‌های بیشتری از ریاضی را نسبت به حساب مرتبه اول خواهد داشت. هرچند داشتن دو نوع سور باعث پیچیدگی‌های منطقی خواهد شد ولی قدرت بیان عبارت‌ها به طور چشمگیری افزایش می‌یابد به طوری که اکثر عبارت‌ها در شاخه‌های مختلف ریاضی قابل بیان و مطالعه در حساب مرتبه دوم هستند. به ویژه آنکه یک پروژه تحقیقاتی در منطق ریاضی به نام ریاضیات معکوس بر اساس حساب مرتبه دوم شکل گرفته و هدف از آن مشخص نمودن اصول لازم برای اثبات قضایای مختلف ریاضیات است. درریاضیات معکوس بر خلاف روال معمول که در آن قضیه را از اصول نتیجه می‌گیرند، از قضیه شروع کرده و کوچک‌ترین مجموعه از اصول که برای اثبات آن قضیه لازم است را مشخص می‌کنند. این پروژه منجر به دسته‌بندی بسیار مفیدی از قضایای معمول ریاضی بر اساس اصول مورد نیاز و فرضیات کلیدی در اثبات آنها خواهد شد. از طرف دیگر اهمیت حساب مرتبه اول به خاطر نقش بنیادی آن در ریاضیات است. حساب مرتبه اول محیط دقیق و شفافی برای بررسی خاصیت‌های پایه‌ای اعداد طبیعی فراهم می‌کند. همانطور که گفته شد، در مورد بسیاری از قضیه‌ها در ریاضی این سوال مطرح است که کدام مجموعه از اصول برای اثبات قضیه مورد نظر مورد نیاز است. برای پاسخ به این سوال با دو مساله مواجه هستیم. مساله اول، انتخاب زبان مناسب و مساله دوم انتخاب مجموعه اصول مناسب است. بسته به ساختار قضیه مورد نظر، به طور معمول حساب مرتبه اول یا مرتبه دوم برای مطالعه اثبات پذیری قضیه مورد نظر مورد استفاده قرار می‌گیرد که در ادامه به اختصار به آن‌ها اشاره می‌کنیم. زبان حساب مرتبه دوم، L_2 یک زبان با دو نوع متغیر است. به عبارت دیگر این متغیرها به دو نوع شئ متفاوت اشاره می‌کنند. متغیرهای نوع اول متغیرهای عددی هستند که به اعضای مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ اشاره می‌کنند و متغیرهای نوع دوم

متغیرهای مجموعه‌ای هستند که به اعضای مجموعه توانی $\mathbb{N}$یعنی به اعضای $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ اشاره می‌کنند. ترم‌های عددی شامل ثابت‌های 0,1 و همچنین $t_1 + t_2$ و $t_1 \cdot t_2$ است. در این‌جا + و · عملگرهای دوتائی برای نمایش جمع و ضرب اعداد طبیعی هستند. فرمول‌های اتمی به صورت $t_1 = t_2$، $t_1 < t_2$ و $t_1 \in X$ هستند که t_1 و t_2 ترم‌های عددی و X متغیر مجموعه‌ای است. فرمول‌ها با استفاده از رابط‌های منطقی، سورهای عددی $\forall n$ و $\exists n$، و سورهای مجموعه‌ای $\forall X$ و $\exists X$ ساخته می‌شوند.

منظور از یک فرمول حسابی فرمولی است که شامل سور مجموعه‌ای نباشد، یا به بیانی همه سورهای آن عددی باشند. فرمول‌های حسابی بر حسب نوع و ترتیب قرار گرفتن سورها دسته‌بندی می‌شوند که به آن اشاره می‌کنیم. Δ_0 کلاس همه فرمول‌های با سور کراندار است یعنی فرمول‌هایی که سورهای آن همگی به صورت $\exists x < t$ یا $\forall x < t$ باشد. به دلیلی که در ادامه روشن می‌شود، Δ_0 را با Σ_0و Π_0 نیز نشان می‌دهیم. کلاس‌های Σ_nو Π_n برای هر $n \in \mathbb{N}$ با استقرا بر n به صورت زیر تعریف می‌شوند: یک فرمول Σ_{n+1} است اگر و تنها اگر به صورت $\exists x\phi(x,y)$ باشد که $\phi \in \Pi_n$. یک فرمول Π_{n+1} است اگر و تنها اگر به صورت $\forall x\phi(x,y)$ باشد که $\phi \in \Sigma_n$. بنابراین یک فرمول Σ_n به صورت

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots Q x_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

است که در آن تمام سورها در ϕ کراندار هستند و Q بسته به اینکه n زوج یا فرد است می‌تواند $\forall$ یا $\exists$ باشد.

به طور مشابه یک فرمول Π_n به صورت

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots Q x_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

است. تذکر می‌دهیم که در فرمول‌های بالا به جای یک سور عمومی می‌تواند بلوکی از سورهای عمومی و به جای یک سور وجودی بلوکی از سورهای وجودی قرار گیرد. البته اجازه می‌دهیم این بلوک تهی نیز باشد، بنابراین هر فرمول Π_n به طور بدیهی هم Π_{n+1} و هم Σ_{n+1} خواهد بود. یک فرمول Δ_n است اگر و تنها اگر معادل یک فرمول Σ_n و معادل یک فرمول Π_n باشد. چون اجازه دادیم که بلوک سورها تهی نیز باشد، به وضوح روابط

$$\Sigma_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+1}, \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Pi_{n+1}$$

برقرارند. به علاوه در منطق محمولات هر فرمول معادل یک فرمول Σ_n یا Π_n است و در نتیجه هر فرمول مانند θ برای یک $n \in \mathbb{N}$، Π_n یا Σ_n خواهد بود.

اکنون به اصول حساب مرتبه دوم می‌پردازیم. اصول حساب مرتبه دوم بستار عمومی فرمول‌های زیر است.

اصول پایه:

$$n + 1 \neq 0$$
$$m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$$
$$m + 0 = m$$
$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$$
$$\neg m < 0$$
$$m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

اصل استقرا:

$$\big(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n + 1 \in X)\big) \rightarrow \forall n(n \in X)$$

اصل تصریح:

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \phi(n))$$

که در آن، $\phi(n)$ فرمولی از L_2 است که X در آن آزاد نیست.

هر فرمولی از زبان که منطقا از اصول نتیجه شود را یک قضیه در سیستم مورد نظر می‌گوییم. بنابراین، حساب مرتبه دوم Z_2، سیستمی در زبان L_2 با مجموعه اصول بالا همراه با تمام قضیه‌های آن است. یک زیرسیستم Z_2، سیستمی در زبان L_2 است که اصول آن قضیه‌هایی از Z_2 هستند. معمولا در مطالعه اثبات پذیری قضایای ریاضی در حساب مرتبه دوم، پنج زیرسیستم RCA_0، WKL_0، ACA_0، ATR_0 و $\Pi_1^1 - CA_0$ استفاده می‌شوند که همگی شامل اصول پایه و استقرا هستند و تفاوت اصلی در مورد اصل تصریح است. اینکه اجازه دهیم فرمول $\phi(n)$ در اصل تصریح چه فرمولی باشد، باعث ایجاد تفاوت در مجموعه X هایی خواهد شد که وجود آنها را فرض کرده‌ایم. به عنوان نمونه، ACA_0 زیر سیستمی از Z_2 شامل اصول پایه، اصل استقرا و اصل تصریح حسابی است. در اینجا اصل تصریح حسابی، اصل تصریح محدود شده به فرمول‌های حسابی است. به عنوان نمونه دیگر، RCA_0 زیر سیستمی از Z_2 شامل اصول پایه، استقرا برای فرمول‌های Σ_1 و اصل تصریح برای فرمول‌های Δ_1 است. اصول WKL_0 همان اصول RCA_0 به علاوه این اصل است که هر درخت نامتناهی حداقل یک مسیر دارد. ثابت شده است که WKL_0 اکیدا از RCA_0 قوی‌تر و اکیدا از ACA_0 ضعیف‌تر است. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد حساب مرتبه دوم، زیرسیستم‌های آن و اثبات پذیری قضایای معمول ریاضی در آن‌ها، کتاب (Simpson, 2009) را ببینید.

اکنون به حساب مرتبه اول می‌پردازیم. زبان حساب مرتبه اول، L_1 شامل نمادهای ثابت 0,1، نماد رابطه‌ای دوتائی $<$ و عملگرهای دوتائی $+,\cdot$ است. اصول PA^- عبارتند از

$$\forall x,y,z\,\big((x+y)+z=x+(y+z)\big)$$
$$\forall x,y\,(x+y=y+x)$$
$$\forall x,y,z\,\big((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)\big)$$
$$\forall x,y\,(x\cdot y=y\cdot x)$$
$$\forall x,y,z\,(x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z)$$
$$\forall x\,((x+0=0)\wedge(x\cdot 0=0))$$
$$\forall x\,(x\cdot 1=x)$$
$$\forall x,y,z\,((x<y\wedge y<z)\rightarrow x<z)$$
$$\forall x\neg x<x$$
$$\forall x,y\,(x<y\vee x=y\vee y<x)$$
$$\forall x,y,z\,(x<y\rightarrow x+z<y+z)$$
$$\forall x,y,z\,(x<y\wedge 0<z\rightarrow x\cdot z<y\cdot z)$$
$$\forall x,y\,(x<y\rightarrow \exists z\,x+z=y)$$
$$0<1\wedge\forall x(0<x\rightarrow 1\leq x)$$
$$\forall x\,0\leq x$$

اصول فوق در مدل استاندارد یعنی $\mathbb{N}$، صادق هستند. همچنین چون همه این اصول مرتبه اول می‌باشند در هر مدل نااستاندارد $Th(\mathbb{N})$ نیز صادق هستند. در این‌جا $Th(\mathbb{N})$، مجموعه تمام جملات صادق در زبان L_1 است (منظور از صادق، درست بودن در $\mathbb{N}$ است). اصول پئانو، همان اصول PA^- به علاوه اصل استقرا است:

$$\forall X\,(0\in X\wedge\forall x\,(x\in X\rightarrow x+1\in X)\rightarrow\forall y\,y\in X)$$

توجه داریم که این اصل استقرا همان اصل استقرا مرتبه دوم است که در صفحه قبل در لیست اصول حساب مرتبه دوم به آن اشاره شد. پئانو و ددکیند دریافتند که این اصول مدل استاندارد یعنی $\mathbb{N}$ را مشخص می‌کنند. به بیان دیگر، تحت یکریختی فقط یک ساختار وجود دارد که در اصول PA^- به علاوه اصل استقرا مرتبه دوم صدق کند و آن $\mathbb{N}$ است. بنابراین از طرفی مجموعه اصول شامل تعدادی اصل مرتبه اول به علاوه اصل استقرا مرتبه دوم است که تا حدودی یکنواختی مجموعه اصول را از بین می‌برد و از طرف دیگر این مجموعه از اصول به یک ساختار منحصر به فرد طبیعی یعنی $\mathbb{N}$ منجر می‌شود که جلوی تنوع مدل‌ها را می‌گیرد. بنابراین برای برطرف کردن این مسائل، معمولا استقرا برای زیر مجموعه‌هایی در نظر گرفته

می‌شود که با یک فرمول مرتبه اول در زبان L_1 تعریف شده باشند. حاصل یک نظریه ضعیف‌تر است که نه فقط $\mathbb{N}$ مدل آن است بلکه مدل‌های دیگری نیز دارد. به این نظریه، حساب مرتبه اول پئانو یا به اختصار PA گفته می‌شود. بنابراین PA، نظریه مرتبه اول شامل اصول PA^- به علاوه استقرا محدود شده به فرمول‌های مرتبه اول است. به بیان دقیق، اگر $\varphi(x)$ یک فرمول در زبان L_1 باشد، استقرا برای فرمول $\varphi(x)$ را که با I_φ نشان می‌دهیم عبارت زیر است:

$$\varphi(0) \wedge \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(x+1)\big) \to \forall x\, \varphi(x)$$

در این‌جا فرمول φ، می‌تواند علاوه بر متغیر اصلی استقرا یعنی x، شامل تعدادی پارامتر باشد.

بنابراین حساب مرتبه اول پئانو PA عبارتست از اصول PA^- به علاوه استقرا I_φ برای تمام فرمول‌های φ در زبان L_1. اگر Γ، کلاسی از فرمول‌ها در زبان L_1 باشد، $\mathrm{I}\Gamma$ نظریه مرتبه اول در زبان L_1 شامل اصول PA^- به علاوه استقرا I_φ برای هر $\varphi \in \Gamma$ است. به عنوان مثال، در این‌جا نظریه‌های $\mathrm{I}\Delta_0$، $\mathrm{I}\Sigma_1$، و $\mathrm{I}\Pi_1$ را خواهیم داشت که همگی زیرسیستم‌های PA هستند.

در این‌جا خوب است به این نکته اشاره کنیم که گرچه اصل استقرا مرتبه دوم با یک جمله بیان می‌شود ولی استقرا در PA توسط یک قالب داده شده است. به عبارت دیگر، در PA استقرا مجموعه نامتناهی از اصول است. ثابت می‌شود که PA هیچ اصل بندی متناهی ندارد. نکته دیگر این‌که مجموعه اصول PA تصمیم‌پذیر است یعنی الگوریتمی وجود دارد که برای جمله مفروض σ تصمیم بگیرد که آیا σ، اصلی از PA هست یا نه. در نتیجه بنابر قضیه ناتمامیت گودل، PA کامل نیست. برای مشاهده جزئیات بیشتر، کتاب (Kaye, 1991) را ببینید.

۲. قضیهٔ رمزی و قضیهٔ هیندمن

در این بخش به معرفی قضایای رمزی و هیندمن می‌پردازیم. مطالعه این قضایا در حساب همواره مورد توجه بوده و همچنان مسائل باز فراوانی نیز در این زمینه وجود دارد. ابتدا مفاهیم لازم را معرفی می‌کنیم.

یک رنگ‌آمیزی برای مجموعه X، تخصیص رنگ به اعضای مجموعه X است. اگر تعداد رنگ‌ها c باشد به رنگ‌آمیزی حاصل یک c–رنگ‌آمیزی X می‌گوییم. به بیان دقیق، یک c–رنگ‌آمیزی X تابعی مانند $f: X \to C$ است که $|C| = c$. معمولا مجموعه $C = \{0,1,\dots,c-1\}$ را به عنوان مجموعه رنگ‌ها در نظر می‌گیریم. چون عدد طبیعی c با مجموعه $\{0,1,\dots,c-1\}$ یکی گرفته می‌شود، رنگ‌آمیزی $f: X \to \{0,1,\dots,c-1\}$ به اختصار به صورت $f: X \to c$ نوشته می‌شود. می‌توان یک c–رنگ‌آمیزی $f: X \to c$ برای مجموعه X را به عنوان افراز X به

زیرمجموعه‌های $S_1, \dots, S_c$ در نظر گرفت که $S_i = \{x \in X : f(x) = i\}$. گوییم رنگ‌آمیزی f بر S تکرنگ است اگر f بر S ثابت باشد. مثلا اگر $f: \{1,2,3,4,5\} \to \{0,1\}$ به صورت $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ و $f(4) = f(5) = 1$ تعریف شود، آنگاه f بر مجموعه $\{1,2,3\}$ تکرنگ از رنگ 0 و بر مجموعه $\{4,5\}$ تکرنگ از رنگ 1 است. $\mathbb{N}$ علاوه بر مجموعه اعداد طبیعی، برای نمایش کاردینال مجموعه‌های نامتناهی نیز استفاده می‌شود. بنابراین، منظور از $f: X \to \mathbb{N}$ یک رنگ‌آمیزی X است که در آن تعداد رنگ‌ها ممکن است نامتناهی باشد. بازه $[m, n]$ همان مجموعه اعداد صحیح این بازه یعنی مجموعه $\{m, m+1, \dots, n\}$ است. برای مجموعه X و عدد طبیعی n، منظور از $[X]^n$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های n عضوی از X است. معمولا X زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است و عضو $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از $[X]^n$ را با دنباله صعودی $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ از اعضای X یکی می‌گیریم. برای تابع $f: [X]^n \to \mathbb{N}$ به جای $f(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ از نماده ساده‌تر $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ استفاده می‌شود.

نماد $X \to (k)^n_c$ یعنی برای هر c–رنگ‌آمیزی از $[X]^n$ مانند $f: [X]^n \to c$ ، مجموعه $H \subseteq X$ از کاردینال k وجود دارد که تابع f بر $[H]^n$ ثابت است. به چنین مجموعه H، مجموعه همگن برای تابع f گفته می‌شود. به وضوح، در این حالت، f بر $[H]^n$ تکرنگ است. توجه داشته باشیم که k در تعریف فوق می‌تواند $\mathbb{N}$ نیز باشد که به معنای وجود مجموعه همگن نامتناهی است. این نکته در قضیه رمزی نامتناهی به خوبی دیده می‌شود.

قضیه رمزی نامتناهی. هرگاه مجموعه nتایی‌ها از اعداد طبیعی را با متناهی رنگ، رنگ کنیم یک مجموعه همگن نامتناهی خواهیم داشت. به عبارت دیگر

$$\forall n, c \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_c$$

قضیه رمزی نامتناهی را به اختصار با RT^n_c نیز نشان می‌دهند. RT^n عبارتست از: برای هر c، RT^n_c.

قضیه رمزی نامتناهی، مرتبه دوم است چون به همه توابع به صورت $[\mathbb{N}]^n \to c$ اشاره می‌کند. همانطور که در ابتدای بخش مقدمه توضیح دادیم، در ریاضیات معکوس قضیه را به عنوان فرض در نظر گرفته و کوچکترین مجموعه از اصول را در حساب مرتبه دوم برای اثبات قضیه به دست می‌آوریم. در مورد قضیه رمزی نامتناهی، برای $n \geq 3$ و $c \geq 2$ ثابت شده است که RT^n و RT^n_c هردو معادل ACA_0 هستند. برای $n = 2$ ثابت شده است که WKL_0 نمی‌تواند RT^2_2 را ثابت کند. عکس این مطلب پاسخ داده نشده است.

سوال باز. آیا $RCA_0 + RT^2_2$ می‌تواند WKL_0 را نتیجه دهد.

اینکه آیا RT^2 می‌تواند WKL_0 را نتیجه دهد یا خیر نیز همچنان حل نشده است.

از طرفی RT^2، هم ثابت می‌کند که تابع آکرمن تام است و هم اینکه ω^ω خوش ترتیب است. اما مساله مشابه در مورد RT_2^2 همچنان باز است.

تابع آکرمن، مثالی برای توابعی است که بازگشتی اولیه نیستند. این تابع که سرعت رشد زیادی دارد، به صورت بازگشتی بر حسب دو متغیر نامنفی m,n تعریف می‌شود:

$$A(0,n) = n+1,$$
$$A(m,0) = A(m-1,1),$$
$$A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1))$$

سوال باز. آیا RT_2^2 ثابت می‌کند که تابع آکرمن تام است؟ آیا RT_2^2 ثابت می‌کند که ω^ω خوش ترتیب است؟

یکی از اثبات‌های قضیه رمزی نامتناهی RT_2^2 به این شکل است که ابتدا رنگ‌آمیزی اولیه را به یک رنگ‌آمیزی به اصطلاح پایا تبدیل کرده و سپس با رنگ‌آمیزی پایای حاصل ادامه می‌دهیم. به عبارتی اثبات را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. به هر یک از این مراحل عبارتی در حساب مرتبه دوم نظیر شده است.

رنگ‌آمیزی $f:[\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ را پایا گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathbb{N}$، رنگ $i \in \{0,1\}$ وجود داشته باشد که برای همه b های به اندازه کافی بزرگ، $f(a,b) = i$. به بیان دقیق، هرگاه برای هر $a \in \mathbb{N}$، $i \in \{0,1\}$ و $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $b \geq N$ داشته باشیم $f(a,b) = i$.

SRT_2^2 : هر 2-رنگ آمیزی پایا از $[\mathbb{N}]^2$، یک مجموعه همگن نامتناهی دارد.

COH : برای هر دنباله $\{A_0, A_1, \dots\}$ از مجموعه‌ها، مجموعه نامتناهی B وجود دارد که برای هر i یا $B \setminus A_i$ یا $B \cap A_i$ متناهی است.

می‌توان دید که RT_2^2 هردوی SRT_2^2 و COH را نتیجه می‌دهد. اولی واضح است، برای مشاهده جزئیات اثبات دومی به (Cholak & Jockusch & Slaman, 2001) مراجعه کنید. حال به اختصار توضیح می‌دهیم که با در نظر گرفتن هردوی SRT_2^2 و COH به عنوان فرض، می‌توان RT_2^2 را ثابت کرد. برای این منظور، 2-رنگ‌آمیزی دل‌خواه $f:[\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ را در نظر بگیرید. ابتدا COH را برای مجموعه‌های $A_i = \{b \in \mathbb{N} : f(i,b) = 1\}$ به کار می‌گیریم تا مجموعه B و رنگ آمیزی پایای $f \restriction [B]^2$ به دست آید. سپس با استفاده از SRT_2^2 حکم قضیه رمزی نامتناهی یعنی RT_2^2 را نتیجه می‌گیریم. بنابراین RT_2^2 معادل $SRT_2^2 + COH$ است. از طرفی ثابت شده است که COH به تنهایی نمی‌تواند RT_2^2 را نتیجه دهد ولی در مورد SRT_2^2 مشخص نیست.

سوال باز. آیا $RCA_0 + SRT_2^2$ می‌تواند RT_2^2 را نتیجه دهد؟

اکنون به قضیه رمزی متناهی می‌پردازیم.

قضیه رمزی متناهی. برای k داده شده، هرگاه مجموعه nتایی‌ها از بازه $[x,y]$ را با متناهی رنگ، رنگ کنیم یک مجموعه همگن متناهی از اندازه k خواهیم داشت. به عبارت دقیق‌تر،

$$\forall x,k,n,c\ \exists y\ [x,y] \to (k)_c^n$$

بنابراین قضیه رمزی متناهی بیان می‌کند که برای اعداد طبیعی مفروض x,k,n,c عدد طبیعی y وجود دارد که هر رنگ آمیزی از $[x,y]^n$ با c رنگ شامل یک زیرمجموعه همگن از $[x,y]$ از اندازه k است.

توجه داریم که قضیه رمزی متناهی به کمک لم گودل یا هر روش کدگذاری مناسب دیگری قابل بیان در زبان PA است. در اینجا سور به کد همه توابع به فرم $[x,y] \to (k)_c^n$ اشاره می‌کند. در واقع $a \to (b)_d^c$ یک محمول بازگشتی اولیه است که بیان می‌کند کد توابع به صورت $[a]^c \to d$ دارای ویژگی معینی هستند. بنابراین در PA ثابت می‌شود که عبارت $a \to (b)_d^c$ معادل یک فرمول Δ_1 است. در نتیجه قضیه رمزی متناهی قابل اثبات در PA است.

در حالت کلی، اگر T یک نظریه در زبان حساب مرتبه اول به طور بازگشتی اصل بندی شده و گسترش سازگاری از PA^- باشد، آن‌گاه یک جمله Π_1 مانند τ وجود دارد که نه $T \vdash \tau$ و نه $T \vdash \neg\tau$. در حالت خاص، PA کامل نیست. پس از اثبات این نکته توسط گودل در سال ۱۹۳۰، این سوال مطرح شد که آیا جمله‌ای از ریاضیات معمولی وجود دارد که در مدل استاندارد درست باشد ولی PA آن را اثبات نکند. به چنین جمله‌ای مستقل از PA گفته می‌شود.

یکی از جملات معمول ریاضی که در مدل استاندارد درست است ولی در PA اثبات‌پذیر نیست، تعمیمی از قضیه رمزی متناهی است که با عنوان قضیه پاریس هرینگتون شناخته می‌شود. در این قضیه از مفهوم نسبتا بزرگ بودن یک مجموعه استفاده می‌شود. یک مجموعه $H \subseteq \mathbb{N}$ را نسبتا بزرگ گوییم هرگاه تعداد عضوآن حداقل به اندازه کوچکترین عضوش باشد. به بیان دیگر، مجموعه $H \subseteq \mathbb{N}$ نسبتا بزرگ است هرگاه $|H| \geq \min(H)$.

نماد $X \xrightarrow{*} (k)_c^n$ یعنی هرگاه $f:[X]^n \to c$، مجموعه $H \subseteq X$ وجود دارد که تابع f بر $[H]^n$ ثابت است و به علاوه $|H| \geq \max\{k, \min(H)\}$. بنابراین تفاوت نمادهای $X \xrightarrow{*} (k)_c^n$ و $X \to (k)_c^n$ تنها در شرط نسبتا بزرگ بودن مجموعه همگن است.

قضیه پاریس هرینگتون همان قضیه رمزی متناهی با شرط نسبتا بزرگ بودن مجموعه همگن است.

قضیه پاریس هرینگتون. $\forall x, k, n, c\ \exists y\ [x, y] \overset{*}{\rightarrow} (k)^n_c$

این قضیه را به اختصار با PH نشان می‌دهیم.

قضیه پاریس هرینگتون تعمیم قضیه رمزی متناهی است و از قضیه رمزی نامتناهی به علاوه لم کونیگ نتیجه می‌شود. این قضیه نیز مانند قضیه رمزی متناهی، قابل بیان در زبان PA است. پاریس و هرینگتون ثابت کردند که PH یعنی قضیه رمزی به علاوه شرط نسبتا بزرگ بودن مجموعه همگن، در PA قابل اثبات نیست. برای جزئیات بیشتر خواننده را به کتاب (Hájek & Pudlák, 1998) ارجاع می‌دهیم.

قضیه هیندمن، یکی دیگر از قضایایی است که اثبات پذیری آن در حساب مطالعه شده است. این قضیه در مورد مجموع‌های متناهی از عناصر متمایز مجموعه مورد نظر است که در ادامه به بیان دقیق آن می‌پردازیم.

قضیه هیندمن. برای هر رنگ آمیزی از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با متناهی رنگ، مجموعه نامتناهی A وجود دارد به طوری که مجموعه تمام اعدادی که به صورت مجموع عناصر متمایز A نوشته می‌شوند، تکرنگ است.

قضیه هیندمن را به اختصار با HT نشان می‌دهیم. ثابت شده است که HT در ACA_0^+ اثبات می‌شود و ACA_0 را نتیجه می‌دهد ولی مشخص نیست که معادل یکی از این دو زیرسیستم است یا اکیدا بین آنها قرار می‌گیرد. در این‌جا، ACA_0^+ همان ACA_0 به علاوه این فرض است که برای هر $X \subseteq \mathbb{N}$، ω اُمین پرش تورینگ X وجود دارد.

سوال باز. آیا HT معادل ACA_0^+ یا معادل ACA_0 است یا اینکه به طور اکید بین آنها قرار دارد؟

اکنون قضیه‌ای را معرفی می‌کنیم که اولین بار توسط ایسای شور(Issai Schur) اثبات شده است. شور ریاضی‌دان متولد روسیه است که در دانشگاه برلین کار می‌کرد. اعداد شور به خاطر این ریاضی‌دان به این نام معروف شده‌اند.

قضیه شور. برای عدد صحیح $r \geq 1$، عدد طبیعی s وجود دارد که در هر r رنگ آمیزی از بازه $[1, s]$ اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند به طوری که مجموعه

$$\{a, b, a + b\} \subseteq [1, s]$$

تکرنگ است.

برای عدد صحیح $r \geq 1$ کوچکترین s با خاصیت فوق را عدد شور مربوط به r رنگ نامیده و آن را با $s(r)$ نشان می‌دهیم. به عنوان یک مثال ساده، به سادگی می‌توان دید که $s(2) = 5$.

برای عدد صحیح مثبت a و مجموعه B منظور از $FS^{=a}(B)$ مجموعه متشکل از مجموع دقیقا a عضو متمایز B است. به طور مشابه $FS^{\leq a}(B)$ مجموعه متشکل از مجموع حداکثر a عضو متمایز B است. در حالت کلی‌تر فرض کنیم A, B دو مجموعه باشند. در این صورت $FS^{A}(B)$ مجموعه متشکل از دقیقا j عضو متمایز B است که j به طور دل‌خواه در A تغییر می‌کند. بنابراین به عنوان مثال، $FS^{\{1,2\}}(B)$ همان $FS^{\leq 2}(B)$ و $FS^{\mathbb{N}}(B)$ مجموعه متشکل از تمام مجموع‌های متناهی عضو متمایز B است.

از ترکیب قضایای هیندمن و شور نتیجه زیر به دست می‌آید.

قضیه نامتناهی هیندمن شور. برای هر 2–رنگ آمیزی از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، مجموعه نامتناهی $H \subseteq \mathbb{N}$ و اعداد مثبت a, b وجود دارند که مجموعه $FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$ تکرنگ است.

اکنون گزاره‌ای را در نظر می‌گیریم که اولین بار توسط آلفرد برائر اثبات شده است. برادر آلفرد دانشجوی شور بود و او به واسطه برادرش با برخی نتایج نظریه اعداد آشنا گردید. قضیه برائرتعمیم طبیعی قضایای شور و واندرواردن است.

قضیه برائر. برای اعداد صحیح $r, l \geq 1$، کوچکترین عدد طبیعی $t = t(r, l)$ وجود دارد که برای هر r–رنگ آمیزی از بازه $[1, t]$ اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند به طوری که مجموعه

$$\{a, b, a + b, a + 2b, \dots, a + (l - 1)b\} \subseteq [1, t]$$

تکرنگ است.

از ترکیب قضایای هیندمن و برائر نتیجه زیر به دست می‌آید.

قضیه نامتناهی هیندمن برائر. برای هر l و هر r –رنگ آمیزی از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، مجموعه نامتناهی $H \subseteq \mathbb{N}$ و اعداد مثبت a, b وجود دارند که مجموعه $FS^{\{a,b,a+b,a+2b,\dots,a+(l-1)b\}}(H)$ تکرنگ است.

در (Carlucci, 2018) ثابت شده است که قضیه نامتناهی هیندمن شور و قضیه نامتناهی هیندمن برائر قابل اثبات در ACA_0 است. ما در این مقاله اثبات پذیری نسخه متناهی این قضایا را در حساب مرتبه اول پئانو مطالعه می‌کنیم.

۳. قضیهٔ متناهی هیندمن شور

در بخش قبل، توضیحاتی در مورد قضیه هیندمن شور و هیندمن برائر ارائه شد. بـه دلیـل اشـاره به تمام رنگ‌آمیزی‌های مجموعه اعداد طبیعی، نسخه نامتناهی ایـن قضـایا مرتبـه دوم اسـت. در این مقاله برای اولین بار نسخه متناهی این قضایا را در نظر گرفته و نشـان مـی‌دهـیم در حسـاب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر هستند.

قضیه متناهی هیندمن شور. برای عدد صحیح مثبت k، عدد صحیح m وجود دارد که بـرای هـر 2–رنـگ آمیـزی از بـازه $[1,m]$ مجموعـه $H \subseteq [1,m]$ و اعـداد صـحیح مثبـت a,b یافـت می‌شوند به طوری که $|H| \geq k$ و مجموعه

$$FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$$

تکرنگ است.

توجه کنیم که با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش قبل، گزاره فوق قابل بیـان در زبـان حساب مرتبه اول است. در ادامه ثابـت مـی‌کنـیم کـه ایـن گـزاره در حسـاب مرتبـه اول پئـانو اثبات‌پذیر است. بـرای ایـن منظـور ابتـدا دو مفهـوم را یـادآوری مـی‌کنـیم. فـرض کنـیم $s(r)$ کوچکترین عدد صحیح مثبت است به طوری که در هر r–رنگ آمیـزی از بـازه $[1,s(r)]$ اعـداد صحیح مثبت a,b یافت شوند که مجموعه $\{a,b,a+b\}$ تکرنگ است. وجود این عدد از قضـیه شور نتیجه می‌شود. همچنین فرض کنیم $R_r^n(k)$ کوچکترین عدد صحیح مثبت است بـه طـوری که در هر r–رنگ آمیـزی از n تـایی‌هـای مجموعـه دل‌خـواه H بـا شـرط $|H| \geq R_r^n(k)$ یـک زیرمجموعه H' از H از اندازه k وجود دارد که n تایی‌های H' تکرنگ است. در واقـع، $H' \subseteq H$ برای این رنگ‌آمیزی همگن است. به عبارت دیگـر، $R_r^n(k)$ کـوچکترین مقـدار از بـین اعـدادی است که قضیه رمزی متناهی وجود آن‌ها را تضمین می‌کند.

قضیه. قضیه متناهی هیندمن شور در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیر است.

اثبات. ایده اثبات از لحاظ کلی شبیه حالت نامتناهی ولی در جزئیات کاملا متفـاوت اسـت و جزئیات باید به گونه‌ای تنظیم شوند که نتیجه مورد نظر به دسـت آیـد. در ایـن اثبـات از قضـیه رمزی متناهی و قضیه شور استفاده می‌کنیم. فرض کنیم k داده شده اسـت. توجـه داریـم کـه بـا توجه به توضیحات بالا برای r,n داده شده، R_r^n را می‌توان به عنوان تـابعی از $\mathbb{N}$ بـه $\mathbb{N}$ در نظـر گرفت که به عدد طبیعی k عدد طبیعی $R_r^n(k)$ را نسبت می‌دهد. دنبالـه‌ای از توابـع $R_i, i \geq 1$ بـا دامنه و برد مجموعه اعداد طبیعی به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$R_1 = R_2^1, \dots, R_{i+1} = R_i o R_2^{i+1}.$$

بنابراین به عنوان مثال، $R_1 = R_2^1$، $R_2 = R_2^1 o R_2^2$ و $R_3 = R_2^1 o R_2^2 o R_2^3$.

اکنون دنباله $m_i, i \geq 1$ از اعداد صحیح مثبت را با استفاده از توابع فوق به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_1 = R_1(k) = R_2^1(k),$$
$$m_2 = R_2(k) = R_2^1\big(R_2^2(k)\big),$$
$$m_3 = R_3(k) = R_2^1\Big(R_2^2\big(R_2^3(k)\big)\Big),$$

و در حالت کلی برای $i \geq 1$ قرار می‌دهیم $m_i = R_i(k)$.

اکنون فرض کنیم $s = s(2)$ عدد شور مربوط به دو رنگ باشد. بنابراین در هر 2-رنگ‌آمیزی از بازه $[1, s]$ یک جواب تکرنگ برای معادله $x + y = z$ خواهیم داشت. برای i، $1 \leq i \leq s$ دنباله m'_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m'_1 = k,$$
$$m'_2 = R_2^s(m'_1) = R_2^s(k),$$
$$m'_3 = R_2^{s-1}(m'_2) = R_2^{s-1}\big(R_2^s(k)\big),$$
$$m'_4 = R_2^{s-2}(m'_3) = R_2^{s-2}\big(R_2^{s-1}(m'_2)\big) = R_2^{s-2}\Big(R_2^{s-1}\big(R_2^s(k)\big)\Big),$$

و با ادامه این روند در حالت کلی برای $2 \leq i \leq s$، داریم $m'_i = R_2^{s-i+2}(m'_{i-1})$.

به خصوص، $m'_s = R_2^2(m'_{s-1})$ و در نتیجه با توجه به تعریف دنباله‌های m_i و m'_i خواهیم داشت

$$m_s = R_2^1(m'_s)$$

حال قرار می‌دهیم $m = m_s$.

ادعا می‌کنیم که m خاصیت گفته شده در صورت قضیه را دارد. یعنی برای هر 2-رنگ‌آمیزی از بازه $[1, m]$ مجموعه $H \subseteq [1, m]$ و اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند به طوری که $|H| \geq k$ و مجموعه

$$FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$$

تکرنگ است. برای این منظور 2-رنگ‌آمیزی دل‌خواه $\chi_1 : [1, m] \to \{0,1\}$ را در نظر می‌گیریم.

با توجه به تعریف $m = m_s = R_2^1(m'_s)$، مجموعه $H_1 \subseteq [1, m]$ وجود دارد که تحدید χ_1 به H_1 تابع ثابت با مقدار $c_1 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_1 همگن با مقدار ثابت c_1 است) و $|H_1| \geq m'_s$.

اکنون 2-رنگ‌آمیزی $\chi_2: [H_1]^2 \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi_2(x_1, x_2) = \chi_1(x_1 + x_2)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف $m'_s = R_2^2(m'_{s-1})$، مجموعه $H_2 \subseteq H_1$ وجود دارد که تحدید χ_2 به H_2 تابع ثابت با مقدار $c_2 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_2 همگن با مقدار ثابت c_2 است) و $|H_2| \geq m'_{s-1}$.

به طور مشابه، 2-رنگ‌آمیزی $\chi_3: [H_2]^3 \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi_3(x_1, x_2, x_3) = \chi_1(x_1 + x_2 + x_3)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف $m'_{s-1} = R_2^3(m'_{s-2})$، مجموعه $H_3 \subseteq H_2$ وجود دارد که تحدید χ_3 بر H_3 تابع ثابت با مقدار $c_3 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_3 همگن با مقدار ثابت c_3 است) و $|H_3| \geq m'_{s-2}$.

با ادامه این روند، به مجموعه‌های $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s$ می‌رسیم که $|H_i| \geq m'_{s-i+1}$ و تحدید χ_i بر H_i تابع ثابت با مقدار c_i است.

به خصوص، $|H_s| \geq m'_1 = k$ و برای هر i، $1 \leq i \leq s$ مشاهده می‌شود که $FS^{=i}(H_s)$ تکرنگ از رنگ c_i است.

در اینجا خوب است به این نکته اشاره کنیم که برای $i \neq j$ گرچه $FS^{=i}(H_s)$ و $FS^{=j}(H_s)$ هردو تکرنگ هستند ولی ممکن است تکرنگ از رنگ‌های متفاوتی باشند. بنابراین در این سطح نیز باید خودمان را به یک مجموعه تکرنگ محدود کنیم. برای این منظور تابع $\chi: [1, s] \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi(i) = c_i$ تعریف می‌کنیم. در این صورت بنابر تعریف عدد شور $s = s(2)$، اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند که مجموعه $\{a, b, a + b\}$ نسبت به χ تکرنگ از رنگ c است. با انتخاب مجموعه $H = H_s$ به وضوح $FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$ نسبت به رنگ‌آمیزی اولیه یعنی χ_1 تکرنگ از رنگ c است و $|H| \geq k$. ■

توجه کنید که با توجه به توضیحات ارائه شده در مقدمه، اثبات فوق قابل بازنویسی در زبان حساب مرتبه اول خواهد بود. در واقع، به کمک لم گودل یا روش مشابه دیگری می‌توان مفاهیم مورد نیاز در قضیه مانند رنگ‌آمیزی، مجموعه همگن و غیره را در زبان حساب مرتبه اول بیان کرد. به علاوه اینکه قضیه رمزی متناهی و قضیه شور که در این اثبات استفاده شدند هر دو در PA قابل اثبات هستند.

نکته دیگر اینکه، در قضیه فوق، هرگاه تعداد r رنگ را به جای دو رنگ در نظر بگیریم، با تغییر جزئی می‌توان نتیجه مشابه را برای r رنگ اثبات کرد.

۴. قضیهٔ متناهی هیندمن برائر

قضیه متناهی هیندمن برائر. برای اعداد صحیح مثبت k, l، عدد صحیح m وجود دارد که برای هر r–رنگ آمیزی از بازه $[1, m]$ مجموعه $H \subseteq [1, m]$ و اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند به طوری که $|H| \geq k$ و مجموعه

$$FS^{\{a,b,a+b,a+2b,\ldots,a+(l-1)b\}}$$

تکرنگ است.

توجه کنیم که با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش مقدمه، گزاره فوق قابل بیان در زبان حساب مرتبه اول است. با تغییر جزئی در اثبات قضیه قبل دیده می‌شود که قضیه متناهی هیندمن برائر در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر است. در واقع، کافی است در اثبات فوق به جای s مقدار $t = t(r, l)$ را در نظر بگیریم. بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه. قضیه متناهی هیندمن برائر در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیر است.

۵. شرط مجزا بودن

در قضیه رمزی متناهی دیدیم که اضافه شدن شرط نسبتا بزرگ بودن به مجموعه همگن باعث اثبات‌ناپذیری قضیه در PA می‌شود. یکی از شرایطی که معمولا به قضایا اضافه می‌شود شرط مجزا بودن است. این شرط که برای اولین بار در قضیه هیندمن ظاهر شده باعث می‌شود که اعضای مجموعه از یکدیگر تا حدی فاصله داشته باشند. در این بخش در دو قضیه متناهی هیندمن شور و هیندمن برائر شرط مجزا بودن را اضافه نموده و ثابت می‌کنیم که همچنان نتیجه در حساب مرتبه اول پئانو قابل اثبات است. ابتدا شرط مجزا بودن را تعریف می‌کنیم.

برای عدد طبیعی n، فرض کنیم $n = 2^{t_1} + 2^{t_2} + \cdots + 2^{t_k}$ که $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$، در این صورت قرار می‌دهیم $\lambda(n) = t_1$ و $\mu(n) = t_k$. مجموعه $H \subseteq \mathbb{N}$ را مجزا گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in H$، اگر $x < y$ آن‌گاه $\mu(x) < \lambda(y)$. به عنوان مثال، مجموعه $\{12,48,192,768\}$ یک مجموعه مجزای متناهی و $\{2,4,8,16,32,\ldots\}$ یک مجموعه مجزای نامتناهی است. به وضوح

مجموعه‌های مجزای متناهی از اندازه دل‌خواه بزرگ وجود دارند و هر زیر مجموعه یک مجموعه مجزا همچنان مجزا است.

ابتدا نشان می‌دهیم که قضیه متناهی هیندمن شور همراه با شرط مجزا بودن در حساب مرتبه پئانو اثبات‌پذیر است.

قضیه. قضیه متناهی هیندمن شور همراه با شرط مجزا بودن در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر است.

اثبات. کافی است تغییر کوچکی در اثبات قضیه هیندمن شور اعمال کنیم تا مجموعه H به علاوه، مجزا هم باشد. فرض کنیم k داده شده است. مشابه قبل، R_r^n را می‌توان به عنوان تابعی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ در نظر گرفت که به عدد طبیعی k عدد طبیعی $R_r^n(k)$ را نسبت می‌دهد. دنباله‌ای از توابع $R_i, i \geq 1$ با دامنه و برد مجموعه اعداد طبیعی به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$R_1 = R_2^1, \dots, R_{i+1} = R_i o R_2^{i+1}.$$

بنابراین به عنوان مثال، $R_1 = R_2^1$، $R_2 = R_2^1 o R_2^2$ و $R_3 = R_2^1 o R_2^2 o R_2^3$.

اکنون دنباله $m_i, i \geq 1$ از اعداد صحیح مثبت را با استفاده از توابع فوق به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
m_1 &= R_1(k) = R_2^1(k),\\
m_2 &= R_2(k) = R_2^1\big(R_2^2(k)\big),\\
m_3 &= R_3(k) = R_2^1\Big(R_2^2\big(R_2^3(k)\big)\Big),
\end{aligned}$$

و در حالت کلی برای $i \geq 1$ قرار می‌دهیم $m_i = R_i(k)$.

اکنون فرض کنیم $s = s(2)$ عدد شور مربوط به دو رنگ باشد. بنابراین در هر 2-رنگ‌آمیزی از بازه $[1, s]$ یک جواب تکرنگ برای معادله $x + y = z$ خواهیم داشت. برای i، $1 \leq i \leq s$ دنباله m'_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
m'_1 &= k,\\
m'_2 &= R_2^s(m'_1) = R_2^s(k),\\
m'_3 &= R_2^{s-1}(m'_2) = R_2^{s-1}\big(R_2^s(k)\big),\\
m'_4 &= R_2^{s-2}(m'_3) = R_2^{s-2}\big(R_2^{s-1}(m'_2)\big) = R_2^{s-2}\Big(R_2^{s-1}\big(R_2^s(k)\big)\Big),
\end{aligned}$$

و با ادامه این روند در حالت کلی برای $2 \leq i \leq s$، داریم $m'_i = R_2^{s-i+2}(m'_{i-1})$.

به خصوص، $m'_s = R_2^2(m'_{s-1})$ و در نتیجه با توجه به تعریف دنباله‌های m_i و m'_i خواهیم داشت

$m_s = R_2^1(m'_s)$.

حال قرار می‌دهیم $m = m_s$. فرض کنیم H_0 یک مجموعه مجزا باشد که $|H_0| \geq m$.

ادعا می‌کنیم که برای هر 2–رنگ‌آمیزی از H_0، مجموعه مجزای $H \subseteq H_0$ و اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند به طوری که $|H| \geq k$ و مجموعه

$FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$

تکرنگ است.

برای این منظور 2–رنگ‌آمیزی دل‌خواه $\chi_1: H_0 \to \{0,1\}$ را در نظر می‌گیریم.

با توجه به تعریف $m = m_s = R_2^1(m'_s)$، مجموعه $H_1 \subseteq H_0$ وجود دارد که تحدید χ_1 به H_1 تابع ثابت با مقدار $c_1 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_1 همگن با مقدار ثابت c_1 است) و $|H_1| \geq m'_s$. توجه داریم که H_1 یک مجموعه مجزا است.

اکنون 2–رنگ‌آمیزی $\chi_2: [H_1]^2 \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi_2(x_1, x_2) = \chi_1(x_1 + x_2)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف $m'_s = R_2^2(m'_{s-1})$، مجموعه $H_2 \subseteq H_1$ وجود دارد که تحدید χ_2 به H_2 تابع ثابت با مقدار $c_2 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_2 همگن با مقدار ثابت c_2 است) و $|H_2| \geq m'_{s-1}$. توجه داریم که H_2 یک مجموعه مجزا است.

به طور مشابه، 2–رنگ‌آمیزی $\chi_3: [H_2]^3 \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi_3(x_1, x_2, x_3) = \chi_1(x_1 + x_2 + x_3)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف $m'_{s-1} = R_2^3(m'_{s-2})$، مجموعه $H_3 \subseteq H_2$ وجود دارد که تحدید χ_3 بر H_3 تابع ثابت با مقدار $c_3 \in \{0,1\}$ است (یا به عبارتی H_3 همگن با مقدار ثابت c_3 است) و $|H_3| \geq m'_{s-2}$. توجه داریم که H_3 یک مجموعه مجزا است.

با ادامه این روند، به مجموعه‌های مجزای $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s$ می‌رسیم که $|H_i| \geq m'_{s-i+1}$ و تحدید χ_i بر H_i تابع ثابت با مقدار c_i است.

به خصوص، $|H_s| \geq m'_1 = k$ و برای هر i، $1 \leq i \leq s$ مشاهده می‌شود که $FS^{=i}(H_s)$ تکرنگ از رنگ c_i است.

در اینجا خوب است به این نکته اشاره کنیم که برای $i \neq j$ گرچه $FS^{=i}(H_s)$ و $FS^{=j}(H_s)$ هردو تکرنگ هستند ولی ممکن است تکرنگ از رنگ‌های متفاوتی باشند. بنابراین در این سطح نیز باید خودمان را به یک مجموعه تکرنگ محدود کنیم. برای این منظور تابع $\chi: [1, s] \to \{0,1\}$ را با ضابطه $\chi(i) = c_i$ تعریف می‌کنیم. در این صورت بنابر تعریف عدد شور $s = s(2)$، اعداد صحیح مثبت a, b یافت می‌شوند که مجموعه $\{a, b, a + b\}$ نسبت به χ تکرنگ از رنگ c

است. با انتخاب مجموعه $H = H_s$، به وضوح $FS^{\{a,b,a+b\}}(H)$ نسبت به رنگ‌آمیزی اولیه یعنی χ_1 تکرنگ از رنگ c است، مجموعه H مجزا است و $|H| \geq k$. ■

با استدلال مشابه بالا، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

قضیه. قضیه متناهی هیندمن برائر همراه با شرط مجزا بودن در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر است.

۶. نتیجه‌گیری و مسائل

در این مقاله نشان دادیم که قضیه متناهی هیندمن شور و هیندمن برائر در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیرند. دیدیم که با اضافه شدن شرط مجزا بودن، نتیجه همچنان قابل اثبات باقی خواهد ماند. اکنون که دیدیم قضایای متناهی هیندمن شور و هیندمن برائر در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیرند، جالب است بدانیم در کدام زیر سیستم از حساب مرتبه اول پئانو قابل اثبات هستند. از طرفی، یک مساله جذاب دیگر به عنوان ادامه این کار، بررسی اثبات‌پذیری یا اثبات‌ناپذیری این قضایا همراه با شرط نسبتا بزرگ بودن مجموعه همگن است. یادآوری می‌کنیم که مجموعه $H \subseteq \mathbb{N}$ را نسبتا بزرگ گوییم هرگاه $|H| \geq \min(H)$.

مساله. آیا قضیه متناهی هیندمن شور (و همچنین هیندمن برائر) همراه با شرط مجزا بودن و شرط نسبتا بزرگ بودن مجموعه همگن در حساب مرتبه اول پئانو اثبات پذیر است؟

۷. تشکر و قدردانی

نویسنده، از داور محترم مقاله به خاطر مطالعه دقیق و پیشنهادات سازنده که باعث بهبود چشمگیر مطالب گردید صمیمانه سپاسگزار است.

کتاب‌نامه

Cholak, Peter A & Jockusch, Carl G & Slaman, Theodore A (2001), “On the strength of Ramsey’s theorem for pairs”, The Journal of Symbolic Logic, vol. 66, No. 1, pp 1-55.

Carlucci, Lorenzo (2018), “Weak yet strong, restrictions of Hindman’s finite sum theorem”, Proceeding of the American Mathematical Society, vol 146, No. 2 pp 819-829.

Petr Hájek, Pavel Pudlák (1998), ‘’Metamathematics of first-order Arithmetic’’, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Kaye, Richard (1991). “Models of Peano Arithmetic”, Clarendon Press, Oxford, Oxford Logic Guides 15.

Simpson, Stephen (2009). ''Subsystems of second order Arithmetic'', Cambridge University Press, New York, NY, Association for Symbolic Logic.