

A Gentzen-type proof system for {LP}

Javid Jafari*

Abstract

The logic {LP} is a paraconsistent logic that bears strong structural and semantic similarities to the LP logic introduced by Graham Priest. It is defined using Nmatrices, a semantic tool that plays a significant role in the study of paraconsistent logics by allowing for the analysis of contradictory statements without collapsing the entire logical system. In this paper, we first present the semantic framework of this logic and then develop a proof theory for it based on Gentzen-type sequent calculus. We show that this proof system is both sound and complete with respect to the proposed matrix semantics. Another focus of this study is the analysis of certain distinctive features of the {LP} logic, where noticeable differences from the original LP logic emerge. In particular, we examine the non-standard behavior of the conjunction operator in this logic, which functions in such a radically different way from common logics that the term conjunction barely seems appropriate.

Keywords: Paraconsistent logics, LP, Nmatrix, Gentzen-type proof system, sequent calculus.

Introduction

Following the study of non-normal models of classical logic, whose existence was first observed by Carnap (1943), a three-valued paraconsistent logic, denoted by {LP}, has been identified. This logic bears a strong resemblance to Priest's well-known paraconsistent logic LP. In Jafari (2025), it is shown that the class of non-normal models of classical logic contains a hidden three-valued semantic structure that closely resembles Strong Kleene's three-valued matrix. However, despite this

* Independent researcher, Tehran, Iran, javidjafari@gmail.com

Date received: 31/07/2025, Date of acceptance: 06/10/2025



similarity, there exists a fundamental difference between the two. The matrix underlying these non-normal models is not an ordinary logical matrix but rather an *non-deterministic matrix* (or Nmatrix).

Materials & Methods

The method used in the article is mainly deductive and analytical. The basic tools and techniques of mathematical logic have been used. The material used is the articles that are introduced at the end and in the text.

Discussion & Results

Non-deterministic matrices were introduced by Avron (2005) as a natural generalization of ordinary logical matrices. In a standard matrix, every logical connective is interpreted by a deterministic truth-function assigning a unique truth value to each combination of inputs. By contrast, in a non-deterministic matrix, the value of a formula is selected from a set of possible truth values rather than being uniquely determined. This semantical flexibility allows Nmatrices to capture logical phenomena that cannot be adequately represented within the framework of ordinary many-valued semantics.

The hidden Nmatrix embedded in the class of non-normal models induces two distinct logical systems. The first is a paraconsistent logic denoted by $\{LP\}$, which is closely related to Priest's Logic of Paradox (LP) (Priest, 1979). The second is a logic denoted by $\{K3\}$, which is closely connected to Kleene's three-valued logic K3. In a precise sense, these systems can be viewed as non-deterministic counterparts of LP and K3, respectively. Although both systems deserve careful investigation, the present paper focuses exclusively on $\{LP\}$, owing to its paraconsistent character and its close relationship with classical logic. The connection between these logics and classical logic challenges the conventional understanding of non-classical logics, particularly paraconsistent logics. Traditionally, paraconsistent logics have been developed as alternatives or rivals to classical logic. Their founders sought to reject the validity of the principle of explosion, according to which any proposition follows from a contradiction. Since this principle is a defining feature of classical reasoning, paraconsistent systems are often regarded as standing in opposition to classical logic, or at least as being largely independent from it.

The emergence of $\{LP\}$ from the semantic structure of classical logic presents a different picture. Rather than being imposed externally as a revisionary alternative,

this logic arises naturally from a semantic phenomenon already present within classical logic itself. The discovery that a paraconsistent logic can be generated from non-normal classical models suggests a much closer relationship between classical and non-classical logic than is usually assumed. Consequently, $\{LP\}$ may be viewed as a naturally occurring non-classical logic, and its systematic study promises to deepen our understanding of both classical and paraconsistent semantics. Several preliminary results concerning $\{LP\}$ have already been established. For example, it has been shown that $\{LP\}$ is a sublogic of Priest's LP. In addition, the logic has been proven decidable, providing a basic understanding of its computational properties. Nevertheless, many important aspects of the system remain unexplored. In particular, very little is known about its proof theory. While its semantic foundations have been partially investigated, the inferential behavior of the logic remains largely unclear. We don't know to what extent familiar proof-theoretic techniques can be adapted for this logic.

The primary goal of this paper is to investigate the proof theory of $\{LP\}$ within the framework of sequent calculi (or Gentzen-type proof systems). Sequent systems provide a powerful tool for studying the structural and inferential properties of logical systems, allowing one to analyze deduction independently of semantical considerations. By developing a sequent calculus for $\{LP\}$, we aim to provide a deeper understanding of proof-theoretic properties of this logic. In the first part of the paper, we introduce a sound and complete sequent calculus for $\{LP\}$. Soundness guarantees that every derivable sequent is semantically valid, while completeness ensures that every semantically valid sequent is derivable within the calculus. Together, these results demonstrate that the proposed proof system accurately captures the semantics of the logic.

After presenting the calculus, we investigate the behavior of the logical connectives of $\{LP\}$ from a proof-theoretic perspective. Particular attention is devoted to conjunction, whose behavior turns out to be highly unusual. In many well-known logical systems, conjunction is classified as a positive connective in the sense that for designated values as input, the compound sentence is also designated. However, we show that the conjunction of $\{LP\}$ fails to satisfy these conditions. As a result, according to a natural proof-theoretic criterion, $\{LP\}$ should itself be regarded as a non-normal logic (according to a definition of normality). The failure of conjunction to behave as a positive connective raises interesting questions about the interaction of logical operators and the nature of inference in non-deterministic

semantic frameworks. Finally, we examine several fundamental proof-theoretic properties of the proposed calculus. In particular, we study the invertibility of logical rules and investigate whether the cut rule can be eliminated from derivations. These properties play a central role in modern proof theory, as they are closely connected with consistency, normalization, proof search, and computational complexity. Establishing cut elimination, in particular, provides strong evidence that the sequent calculus captures the essential inferential content of the logic in a well-behaved and non-redundant manner.

Conclusion

Through these investigations, the paper aims not only to provide the first systematic proof-theoretic treatment of $\{LP\}$ but also to contribute to the broader study of the relationships between classical logic, paraconsistency, and non-deterministic semantics. The results suggest that non-classical logics need not always be viewed as competitors to classical logic; in some cases, they may emerge naturally from the semantic structures already implicit within classical reasoning itself.

Bibliography

- Arieli, O., & Avron, A. (2015). Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics. In J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, & S. Dutta (Eds.), *New Directions in Paraconsistent Logic* (pp. 91–129). Springer India.
- Avron, A. (2005). Non-deterministic Semantics for Logical Systems. *Handbook of Philosophical Logic*, 16(14), 227–304.
- Avron, A., Arieli, O., & Zamansky, A. (2018). *Theory of Effective Propositional Paraconsistent Logics*. Studies in Logic, College Publications.
- Carnap, R. (1943). *Formalization of Logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Jafari, J. (2025). Non-Classical Beasts Under the Carpet. *Topoi*, 44, 1–8.
- Priest, G. (1979). Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 8(1), 219–241.

یک حساب رشته برای {LP}

جاوید جعفری*

چکیده

منطق {LP} یک منطق فراسازگار است که از نظر ساختاری و سمنتیکی شباهت زیادی با منطق LP معرفی شده توسط گراهام پریست دارد. این منطق در پی مطالعه مدل‌های غیرنرمال کارنپ مورد مطالعه قرار گرفته شده است. {LP} برخلاف منطق پریست با استفاده از ماتریس‌های نامعین تعریف می‌شود؛ ابزاری که نقش مهمی در ارائه معناسازی برای منطق‌های فراسازگار ایفا می‌کند و امکان بررسی گزاره‌های متناقض بدون فروپاشی کل نظام منطقی را فراهم می‌سازد. در این مقاله، ابتدا چارچوب سمنتیکی این منطق معرفی شده و سپس یک سیستم نظریه برهان بر پایه حساب رشته گنتزن برای آن ارائه می‌گردد. نشان داده خواهد شد که این سیستم استنتاجی نسبت به ماتریس نامعین معرفی شده صحیح و تمام است. سپس برخی ویژگی‌های خاص منطق {LP} بررسی می‌شود که تفاوت‌های بارزی نسبت به منطق LP دارد. به طور خاص، رفتار غیرمعارف عملگر عطف در این منطق مورد بررسی قرار گرفته است، این عملگر به شیوه‌ای کاملاً متفاوت از منطق‌های متداول عمل می‌کند، طوری که به سختی نام عطف را به آن می‌توان داد

کلیدواژه‌ها: منطق‌های فراسازگار، منطق پارادوکس گراهام پریست، ماتریس‌های نامعین، حساب رشته، نظریه برهان.

۱. مقدمه

در پی مطالعه مدل‌های غیرنرمال منطق کلاسیک که برای اولین بار کارنپ (Carnap, 1943) به وجود آن‌ها پی برد، یک منطق فراسازگار سه‌ارزشی به نام {LP} شناسایی شده است که

* محقق مستقل، تهران، javidjafari@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۰۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۴



شباهت زیادی به منطق فراسازگار شناخته شده LP دارد. در (Jafari, 2025) نشان داده شده است که مجموعه مدل‌های غیرنرمال در دل خود یک ماتریس سه‌ارزشی شبیه به ماتریس کلینی قوی پنهان دارد. گرچه این ماتریس شباهت زیادی به کلینی قوی دارد، اما یک تفاوت بنیادین با آن دارد؛ این ماتریس یک ماتریس معمولی نیست، بلکه یک ماتریس «نامعین» است. ماتریس‌های نامعین تعمیمی طبیعی از ماتریس‌های معمولی هستند که توسط آورن در (Avron, 2005) معرفی شده‌اند. در این ماتریس‌ها برخلاف ماتریس‌های معمولی، ارزش یک جمله به صورت نامعین از یک فضای ممکن ارزش‌ها انتخاب می‌شود.

این ماتریس پنهان در دل مدل‌های غیرنرمال دو منطق القا می‌کند: یک منطق فراسازگار به نام $\{LP\}$ که شباهت زیادی به منطق پارادوکس‌ها LP پرست (Priest, 1979) دارد و دیگری $\{K3\}$ که بسیار نزدیک به $K3$ کلینی است. در واقع، این دو منطق همزادهای نامعین دو منطق LP و $K3$ هستند. در اینجا ما تنها به $\{LP\}$ که یک منطق فراسازگار است می‌پردازیم.

ارتباط این منطق‌ها با منطق کلاسیک با تصور رایج درباره نسبت منطق‌های انحرافی، به ویژه منطق‌های فراسازگار، در تعارض است. منطق‌های فراسازگار به عنوان منطق‌های رقیب برای منطق کلاسیک ظهور کرده‌اند. بنیان‌گذاران آن‌ها، در اعتراض به اعتبار قاعده انفجاری تناقض که می‌گوید از تناقض هر چیزی نتیجه می‌شود، این منطق‌ها را معرفی کرده‌اند. انتظار می‌رود که این منطق‌ها در مقابل و علیه منطق کلاسیک باشند و یا حداقل ارتباطی با آن نداشته باشند. اما این یافته نشان می‌دهد که برخی از این منطق‌ها ارتباطی تقریباً طبیعی با منطق کلاسیک دارند. بنابراین مطالعه این منطق به عنوان یک منطق «غیر کلاسیک طبیعی» به نظر ارزشمند می‌رسد.

برخی از ویژگی‌های مقدماتی مانند اینکه $\{LP\}$ یک زیرمنطق برای LP است نشان داده شده است و یا تصمیم‌پذیری آن نیز مشخص است، اما بسیاری از ویژگی‌های دیگر این منطق مطالعه نشده‌اند. برای مثال، از منظر نظریه برهان این منطق چندان شناخته شده نیست، مثلاً نمی‌دانیم چه قواعد استنتاجی بر عملگرهای این منطق حاکم‌اند. ما در این مقاله ویژگی‌های نظریه برهانی این منطق را در چارچوب حساب رشته‌ها مطالعه می‌کنیم. در بخش اول، یک حساب رشته صحیح و تمام برای این منطق معرفی می‌کنیم و سپس به برخی از ویژگی‌های عملگرهای منطقی آن می‌پردازیم. مشخصاً نشان می‌دهیم که عطف این منطق رفتاری غیرعادی دارد. عطف این منطق، برخلاف بسیاری از منطق‌های شناخته شده، یک عملگر مثبت (بنگرید به

تعریف ۷) به حساب نمی‌آید و طبق تعریفی این منطق یک منطق «غیر نرمال» به حساب می‌آید. در انتها به برخی از ویژگی‌های نظریه برهانی این سیستم مانند برگشت‌پذیری قواعد و امکان حذف قاعده برش می‌پردازیم.

۲. مقدمات

در بخش‌های بعد، ما با زبان گزاره‌ای L که شامل عملگرهای $\{\wedge, \vee, \neg\}$ است کار می‌کنیم. این زبان شامل یک مجموعه شمارش‌پذیر از گزاره‌های اتمی به شکل $\{p_1, p_2, \dots\}$ است و بقیه فرمول‌ها به صورت متداول از این گزاره‌ها تشکیل می‌شوند (یعنی جبر آزاد تولیدشده توسط گزاره‌های اتمی و عملگرهای زبان). مجموعه تمام جملات این زبان را با $\mathcal{W}(L)$ نشان می‌دهیم. اعضای این مجموعه را با $\phi, \psi, \sigma, \dots$ و زیرمجموعه‌های آن را با حروف بزرگ یونانی مانند $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ نشان می‌دهیم. هر زوج مرتب از این مجموعه‌ها مانند (Γ, Δ) را یک رشته می‌نامیم، عضو اول را مقدمه و عضو دوم آن را تالی می‌گوییم. در ادامه رشته‌ها را به صورت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ نمایش می‌دهیم. رشته‌های ما در اینجا به اصطلاح چندتالی هستند. یک رشته را متناهی می‌گوییم، هرگاه مقدمات و تالی آن متناهی باشند.

یک قاعده استنتاجی متشکل از مجموعه‌ای متناهی از رشته‌های متناهی به‌عنوان مقدمه و یک رشته متناهی به‌عنوان تالی است. به عبارتی، قواعد استنتاجی به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{\{\Sigma_i \Rightarrow \Pi_i\}_{0 \leq i \leq n}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

که n یک عدد طبیعی است و تمام رشته‌های حاضر در مقدمه و نتیجه قاعده متناهی هستند. قواعدی که مقدمات آن‌ها تهی است را اصل می‌نامیم. همچنین در ادامه از علامت مجموعه در مقدمات قاعده پرهیز می‌کنیم و تنها آن‌ها را با فاصله از یکدیگر جدا می‌کنیم. اگر رشته $\Gamma \Rightarrow \Delta$ اثبات‌پذیر نباشد، می‌نویسیم $\Gamma \not\Rightarrow \Delta$.

در این بخش ماتریس‌های نامعین که ابزار سمانتیکی اصلی ما در این مقاله است را معرفی می‌کنیم. در ابتدا تعریف کلی ماتریس‌های نامعین و ارزش‌دهی و رابطه انتاجی که القا می‌کنند را می‌آوریم، سپس یک نمونه خاص از آن یعنی ماتریس متعلق به $\{LP\}$ را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱ (ماتریس نامعین). یک ماتریس نامعین برای زبان L یک سه‌تایی مرتب است

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle \text{ به طوری که:}$$

۱. \mathcal{V} یک مجموعه ناتهی از ارزش‌ها.

۲. D یک زیرمجموعه ناتهی و سره از \mathcal{V} است (ارزش‌های برگزیده).

۳. \mathcal{O} تابعی است که به هر نماد عملگری n موضعی مانند \circ یک تابع به صورت $\mathcal{O}(\circ): \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})/\emptyset$ نسبت می‌دهد. به عبارتی این تابع مشخص می‌کند هر کدام از عملگرهای زبان چگونه تعبیر شوند، یا مشخص می‌کند که جدول صدق مربوط به آن‌ها چه رفتاری داشته باشند.

در ادامه برای سادگی، برای اشاره به این تابع‌ها به جای $\mathcal{O}(\circ)$ می‌نویسیم \circ . برای مثال اگر \wedge عطف در زبان باشد، تابعی که آن را تعبیر می‌کند را نیز با \wedge نشان می‌دهیم. از زمینه مشخص خواهد شد که منظورمان خود نماد عطف است یا تابعی که آن را تعبیر می‌کند.

حال که ماتریس نامعین را معرفی کردیم، نیاز داریم که ارتباط آن با جملات زبان را نیز مشخص سازیم. در نتیجه نیازمند یک تعریف برای ارزش‌دهی‌های ممکن در یک ماتریس نامعین هستیم. در ماتریس‌های معین ارزش‌دهی‌ها به صورت هم‌ریختی‌هایی از جبر متناظر با زبان و جبری که ماتریس بر آن مبتنی است تعریف می‌شود. اما در ماتریس‌های نامعین تعریف دیگری را لازم داریم.

تعریف ۲ (ارزش‌دهی). فرض کنید که \mathcal{M} یک ماتریس معین برای زبان \mathcal{L} باشد. تابع $v: \mathcal{W}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{V}$ یک ارزش‌دهی برای این ماتریس است، هرگاه به ازای هر عملگر \circ و جملات دلخواه ϕ_1, \dots, ϕ_n این زبان رابطه زیر برقرار باشد:

$$v(\circ(\phi_1, \dots, \phi_n)) \in \circ(v(\phi_1), \dots, v(\phi_n))$$

برای مجموعه دلخواه فرمول‌ها مانند Γ ، مجموعه $\{v(\sigma): \sigma \in \Gamma\}$ را با $v[\Gamma]$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که گرچه عملگرها در ماتریس‌های نامعین یک مجموعه‌ای از ارزش‌ها به یک ورودی خاص نسبت می‌دهند، اما در تعریف ارزش‌دهی‌ها برای جملات زبان چنین چیزی برقرار نیست. هر کدام از ارزش‌دهی‌ها فقط یک ارزش مشخص به جملات زبان نسبت می‌دهند که البته این ارزش‌ها به صورت نامعین از مجموعه ممکن ارزش‌ها انتخاب شده است. با این تعاریف می‌توان دید که چطور علامت عضویت (\in) جای علامت تساوی ($=$) را در تعریف ارزش‌دهی متداول مبتنی بر ماتریس‌های معین گرفته است.

این ویژگی نشان می‌دهد که اصل ترکیبی بودن (compositionality) در این ماتریس‌ها برقرار نیست: ارزش یک جمله مرکب به نحو یکتایی وابسته به ارزش اجزای آن نیست. طبق این تعمیم، ماتریس‌های معمولی فقط حالت خاصی از ماتریس‌های نامعین هستند، وقتی

فضای ارزشدهی‌ها یک مجموعه تک‌عضوی است ما ماتریس معمولی را داریم. ماتریس‌های نامعین به‌عنوان ابزار سمانتیکی برای مطالعه منطق‌ها کاربرد فراوانی یافته‌اند. برای مثال، نشان داده شده که یک رده بزرگ از منطق‌های فراسازگار منسوب به LFI‌ها یا «منطق‌های ناسازگاری صوری» را نمی‌توان با ماتریس‌های معمولی متناهی‌ارزشی توصیف کرد. اما وقتی ماتریس‌های نامعین به میان می‌آیند، همان‌طور که در (Avron, 2005) نشان داده شده است، رده بزرگی از آن‌ها به راحتی توصیف می‌شوند (و البته نه همه آن‌ها؛ برخی از این منطق‌ها حتی توسط ماتریس‌های نامعین متناهی هم قابل توصیف نیستند).

حال که تمام ارزش‌دهی‌های ممکن یک ماتریس را تعریف کردیم، می‌توانیم رابطه انتاج القاشده توسط آن را نیز تعریف کنیم.

تعریف ۳. $(\models_{\mathcal{M}})$ رابطه انتاج القاشده توسط ماتریس نامعین \mathcal{M} را با $\models_{\mathcal{M}}$ نشان می‌دهیم. این یک رابطه دومی زیرمجموعه $\mathcal{P}(L) \times \mathcal{P}(L)$ است، و به این صورت تعریف می‌شود: $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \Delta$ معتبر است اگر و تنها اگر به ازای هر ارزش‌دهی v برای حداقل یک عضو $\phi \in \Gamma$ داشته باشیم $v(\phi) \notin \mathcal{D}$ یا به ازای حداقل یک عضو $\psi \in \Delta$ داشته باشیم $v(\psi) \in \mathcal{D}$. اگر یک رشته معتبر نباشد، می‌نویسیم $\Gamma \not\models \Delta$.

اگر v حداقل به یک عضو از Γ ارزش غیربرگزیده نسبت بدهد یا حداقل به یک عضو از Δ ارزش برگزیده نسبت بدهد، می‌گوییم ارزش‌دهی v رشته $\Delta \Rightarrow \Gamma$ را ارضا می‌کند.

در ادامه، وقتی ماتریس‌ها یا سیستم استنتاجی خاصی مد نظرمان نیست، به رابطه انتاج «منطق» نیز می‌گوییم. هرگاه رابطه انتاج زیرمجموعه رابطه انتاج دیگری باشد، می‌گوییم منطق اولی زیرمنطق منطق دومی است.

۳. منطق $\{LP\}$

تعریف ۴. ماتریس نامعین $\mathcal{M}_{\{LP\}}$ ساختاری به شکل $(\{t, f, \top\}, \{t, \top\}, \emptyset)$ است طوری که \emptyset هر کدام از عملگرهای زبان \mathcal{L} را به صورت زیر تعبیر می‌کند:

$\bar{\wedge}$	t	f	\top	$\bar{\vee}$	t	f	\top	$\bar{\rightarrow}$	
t	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{\top\}$	t	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{\top\}$	t	$\{f\}$
f	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$	f	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{\top\}$	f	$\{t\}$
\top	$\{\top\}$	$\{f\}$	$\{f, \top\}$	\top	$\{t\}$	$\{\top\}$	$\{t, \top\}$	\perp	$\{\perp\}$

همان طور که می بینید، ماتریس نامعین بالا شباهت زیادی به ماتریس کلینی قوی دارد. نقض هر دو یکی هستند، اما دیگر عملگرها نسبت به ارزش T بسته نیستند، یعنی عضوی غیر از T در $T \circ T$ وجود دارد. اما در بقیه موارد، این ماتریس دقیقاً مثل ماتریس کلینی رفتار می کند. در برای عملگر شرط نیز جدول صدقی در نظر گرفته شده است. چون این عملگر را می توان به صورت متداول به شکل $\psi \vee \neg \varphi$ تعریف کرد، ما از آوردن آن خودداری کرده ایم.

همان طور که در نشان داده شده، شباهت بین این ماتریس نامعین و ماتریس کلینی فقط ظاهری نیست و بین منطق های القاشده توسط آن ها نیز رابطه ای برقرار است. در واقع، منطق القاشده توسط ماتریس بالا یک زیرمنطق از منطق القاشده توسط ماتریس کلینی است:

قضیه ۱ منطق $\{LP\}$ یک زیرمنطق برای LP است.

در ادامه، برای اشاره به رابطه انتاج القاشده توسط ماتریس بالا، به جای $\models_{M_{\{LP\}}}$ صرفاً می نویسیم \models و اندیس آن را نمی آوریم.

همان طور که مشاهده کردید، منطق $\{LP\}$ کاملاً به صورت سمانتیکی معرفی شده است و هیچ سیستم استنتاجی ای برای آن معرفی نشده است. در این بخش، یک سیستم حساب رشته معرفی می کنیم و در بخش بعد نشان می دهیم که این سیستم نسبت به $\{LP\}$ صحیح و کامل است.

تعریف ۵. سیستم حساب رشته گنترن متشکل از اصول و قواعد زیر را $G_{\{LP\}}$ می نامیم.

اصول:

$$\Rightarrow \varphi, \neg \varphi, \varphi \Rightarrow \varphi$$

قواعد عملگری:

یک حساب رشته برای $\{LP\}$ (جاوید جعفری) ۱۶۱

$$\begin{array}{c}
 [\wedge \Rightarrow] \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \quad [\Rightarrow \wedge] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \neg\varphi/\neg\psi, \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \\
 \\
 [\Rightarrow \vee] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \quad [\vee \Rightarrow] \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 \\
 [\Rightarrow \neg] \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta} \quad [\Rightarrow \neg] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi} \\
 \\
 [\Rightarrow \neg\wedge] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi, \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \wedge \psi)} \quad [\neg\wedge \Rightarrow] \frac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta} \\
 \\
 [\neg\vee \Rightarrow] \frac{\Gamma, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Delta} \quad [\Rightarrow \neg\vee] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi \quad \Gamma, \varphi/\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \vee \psi)}
 \end{array}$$

قواعد ساختاری:

$$[W] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'} \quad [Cut] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma', \varphi \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

توجه داشته باشید که قواعد $[\Rightarrow \neg\vee]$ و $[\Rightarrow \wedge]$ در واقع نماینده دو قاعده هستند. در یکی، فرمول سمت راست علامت / دارد و در دیگری، فرمول سمت چپ آن، یعنی این قاعده برای هر کدام از این فرمول‌ها درست است.

اگر راست‌ترین رشته را در قواعد $[\Rightarrow \neg\vee]$ و $[\Rightarrow \wedge]$ حذف کنیم، یک حساب رشته‌ای صحیح و کامل نسبت به منطق LP خواهیم داشت. در این صورت، $[\Rightarrow \neg\vee]$ باید به شکل زیر باشد:

$$[\Rightarrow \neg\vee] \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \vee \psi)}$$

و همچنین قاعده معرفی عطف $[\Rightarrow \wedge]$ مانند شکل کلاسیک آن باشد. تمامیت و صحت این سیستم در آمده است.

اثبات‌پذیری نیز در این سیستم مانند اغلب سیستم‌های نوع گتزن به صورت درخت تعریف می‌شود. چون قید کردیم طرفین رشته‌ها در قواعد باید متناهی باشند، تمام رشته‌های اثبات‌پذیر نیز متناهی خواهند بود و به این ترتیب رده بزرگی از استنتاج‌ها که بی‌نهایت مقدمه یا

تالی دارند را از دست خواهیم داد. برای خلاص شدن از این قید، به تبعیت از آورن (Avron et al, 2018:34)، یک تعریف کلی تری از اثبات ارائه می‌دهیم:

تعریف ۶. رشته $\Gamma \Rightarrow \Pi$ در $G_{\{LP\}}$ اثبات‌پذیر است هرگاه که زیرمجموعه‌های متناهی $\Gamma' \subseteq \Gamma$ و $\Pi' \subseteq \Pi$ وجود داشته باشد، طوری که $\Gamma' \Rightarrow \Pi'$ ریشه درختی باشد که برگ‌های آن اصول $G_{\{LP\}}$ و گره‌های آن توسط قواعد بالا توجیه شده باشند.

قواعد مربوط به بخش دارای عملگر فصل، دقیقاً مانند قواعد منطق کلاسیک است. هر آنچه منطق کلاسیک می‌تواند در مورد تنها فصل اثبات کند در این سیستم نیز قابل اثبات است. اما عطف رفتاری متفاوت دارد. همان‌طور که می‌بینید، قاعده سمت راست فصل دارای شکل متعارف خود نیست و سه مقدمه دارد. برخی قضایای مهم مانند $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi, \psi$ در این سیستم قابل اثبات نیست (در بخش بعد، پس از اثبات تمامیت، مثال نقض آن را می‌آوریم). با این حال، یک نسخه ضعیف‌شده آن قابل اثبات است:

$$[\Rightarrow \wedge] \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi \quad \varphi, \psi \Rightarrow \neg\varphi, \psi \quad \varphi, \psi, \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}{\varphi, \psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi \wedge \psi}$$

رشته‌های موجود در برگ درخت اثبات بالا همه به وسیله اصل موضوعه این‌همانی و قاعده $[W]$ اثبات‌پذیر هستند. در نتیجه، این درخت نیز یک برهان به حساب می‌آید. به طور مشابه، می‌توان $\varphi \wedge \psi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow \neg\varphi$ را نیز اثبات کرد. این استنتاج می‌گوید اگر دو جمله در مقدمه داشته باشیم، یا نقیض یکی از مقدمات یا عطفشان برقرار خواهد بود. گرچه فصل این سیستم دقیقاً مانند فصل منطق کلاسیک عمل می‌کند، ارتباط آن با نقیض پیچیده‌تر است. برای مثال، در منطق کلاسیک و همچنین در LP، استنتاج $\neg(\varphi \vee \neg\psi) \Rightarrow \neg\varphi, \neg\neg\psi$ (یا اثبات‌پذیر است. اما در $\{LP\}$ برقرار نیست و تنها یک نسخه ضعیف‌شده آن قابل اثبات است:

$$[\Rightarrow \neg\vee] \frac{\neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \quad \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow \varphi, \neg\psi \quad \neg\varphi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow \varphi, \neg(\varphi \vee \psi)}$$

۴. صحت و تمامیت

در این بخش به اثبات تمامیت و صحت دستگاه استنتاجی $G_{\{LP\}}$ با منطق $\{LP\}$ می پردازیم. ابتدا قضیه صحت را می آوریم:

قضیه ۲ (صحت). اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در $G_{\{LP\}}$ اثبات پذیر باشد، آنگاه $\Gamma \models \Delta$ برای $\mathcal{M}_{\{LP\}}$ معتبر است.

اثبات. برای اثبات این حکم باید نشان دهیم برای هر قاعده در سیستم استنتاجی، اگر مقدمات آن معتبر باشند، تالی آن نیز معتبر است. ما حالت قوی تری از این را اثبات می کنیم، یعنی نشان می دهیم اگر یک ارزش دهی دلخواه مقدمات یک قاعده را صادق کند، تالی آن قاعده نیز صادق خواهد بود. این کار پرزحمت اما ساده ای است. ما از آوردن همه موارد پرهیز می کنیم و به دو قاعده بسنده می کنیم:

قاعده $[\Rightarrow \wedge]$: فرض کنید که v یک ارزش دهی باشد. اگر عضوی مانند σ در Γ باشد طوری که $v(\sigma) \notin \mathcal{D}$ و یا عضوی مانند δ در Δ باشد طوری که $v(\delta) \in \mathcal{D}$ می توان دید که نتیجه این قاعده یعنی $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ نیز معتبر است. در غیر این صورت باید داشته باشیم $v(\psi) \in \mathcal{D}$ ، $v(\varphi) \in \mathcal{D}$ و $v(\neg\varphi) = f$. از مورد آخر طبق جدول نقض نتیجه می شود که $v(\varphi) = t$. حالا از $v(\psi) \in \mathcal{D}$ نتیجه می گیریم که ارزش ψ یا t است یا T ، که در دو حالت طبق جدول بالا می توانیم نتیجه بگیریم که $v(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{D}$.

قاعده $[\Rightarrow \neg]$: مانند بخش قبل، حالتی را فرض می کنیم که عضوی با ارزش برگزیده در Δ و عضوی با ارزش غیر برگزیده در Γ نباشد. در این حالت باید داشته باشیم $v(\neg\varphi) \in \mathcal{D}$ ، $v(\neg\psi) \in \mathcal{D}$ و $v(\varphi) = f$. دو حالت برای ψ داریم، یا ارزش آن T است و یا f . طبق جدول بالا برای فصل خواهیم یا خواهیم داشت $v(\varphi \vee \psi) = T$ و یا $v(\varphi \vee \psi) = f$ که در هر دو حالت خواهیم داشت $v(\neg(\varphi \vee \psi)) \in \mathcal{D}$ ، در نتیجه تالی قاعده یعنی $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \vee \psi)$ نیز معتبر خواهد بود. \square

برای اثبات تمامیت، نیازمند چند قضیه هستیم که در زیر می آید:

قضیه ۳. اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ آنگاه یک مجموعه Σ از جملات در زبان \mathcal{L} وجود دارد، طوری که

$$\Gamma \subseteq \Sigma$$

$$\Sigma \Rightarrow \Delta$$

۲. به ازای هر $\psi \notin \Sigma$ داریم که: $\Sigma, \psi \Rightarrow \Delta$

۳. $\Sigma \Rightarrow \Pi$ اگر و تنها اگر حداقل یک عضو از Π در Σ باشد.

اثبات. فرض کنید که $\{\psi_n: n \in \omega\}$ یک شماره گذاری برای مجموعه تمام فرمول های زبانمان باشد. دنباله $\{\Sigma_n: n \in \omega\}$ را به صورت بازگشتی تعریف می کنیم $\Sigma_0 = \Gamma$. و به ازای هر $0 < n$ با فرض تعریف Σ_n :

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n & \text{اگر } \Sigma_n, \psi_n \Rightarrow \Delta \\ \Sigma_n \cup \{\psi_n\} & \text{اگر } \Sigma_n, \psi_n \not\Rightarrow \Delta \end{cases}$$

برای اثبات موارد بالا ابتدا نشان می دهیم که به ازای هر n داریم: $\Sigma_n \Rightarrow \Delta$ با استقرا روی n این حکم را اثبات می کنیم. برای $n = 0$ طبق تعریف این حکم برقرار است. فرض کنید که $\Sigma_n \Rightarrow \Delta$. طبق ساختار بالا دو حالت داریم، یا $\Sigma_{n+1} = \Sigma$ که در این صورت فرض استقرا می دهد $\Sigma_{n+1} \Rightarrow \Delta$ ، یا اینکه $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \psi_n$ که در این صورت هم طبق شرط بالا خواهیم داشت $\Sigma_{n+1} \Rightarrow \Delta$.

حالا Σ را معادل با اجتماع دنباله تعریف شده بگیرد:

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$$

برای اثبات (۱)، فرض کنید که این طور نباشد، سپس یک مجموعه متناهی Σ' طوری که $\Sigma \subseteq \Sigma'$ وجود دارد که $\Sigma' \Rightarrow \Delta$ ، فرض کنید که Σ' کوچک ترین چنین مجموعه ای باشد. حالا فرض کنید که k بزرگ ترین اندیس فرمول های داخل Σ' باشد، چون به صورت کلی برای هر n داریم $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ خواهیم داشت که $\Sigma' \subseteq \Sigma_{k+1}$ و $\Sigma_{k+1} \Rightarrow \Delta$ که با قضیه ای که در بالا اثبات کردیم که به ازای هیچ n ، Σ_n نمی تواند Δ را اثبات کند در تناقض است. پس فرض اشتباه است و داریم

$$\Sigma \Rightarrow \Delta.$$

برای اثبات (۲) یک فرمول مانند $\psi \notin \Sigma$ را فرض کنید. این فرمول باید در لیست فرمول ها ظاهر شده باشد، پس به ازای یک n مشخص باید داشته باشیم $\psi_n = \psi$. از طرفی داریم که $\psi_n \notin \Sigma_{n+1}$ (چون Σ اجتماع Σ_n هاست). اما این فرض طبق شرایط ساخت بالا نتیجه می دهد که $\Sigma_n, \psi_n \Rightarrow \Delta$. چون $\Sigma_n \subseteq \Sigma$ ، خواهیم داشت $\Sigma, \psi \Rightarrow \Delta$ همان طور که انتظار داشتیم.

سمت چپ به راست (۳) بدیهی است، برای اثبات سمت دیگر، بر خلاف حکم فرض کنید که $\Sigma \Rightarrow \Pi$ اما به ازای هر $\sigma \in \Pi$ داشته باشیم $\sigma \notin \Sigma$. از $\Sigma \Rightarrow \Pi$ نتیجه می شود که دو زیرمجموعه متناهی $\Sigma' \subseteq \Sigma$ و $\Pi' \subseteq \Pi$ وجود دارند که $\Sigma' \Rightarrow \Pi'$. اعضای Π' را به صورت $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ می نویسیم. چون هیچ کدام از σ_i ها عضو Σ نیستند طبق مورد (۱) به ازای هر $0 \leq i \leq n$ خواهیم داشت که $\sigma_i \Rightarrow \Delta$. با اعمال n قاعده برش $[Cut]$ بین این رشته و $\Sigma' \Rightarrow \sigma_1, \dots, \sigma_n$ خواهیم داشت که با مورد (۱) در تناقض است. \square

قضیه ۴. موارد زیر برقرار است:

۱. $\neg\phi \in \Sigma$ یا $\phi \in \Sigma$.
۲. $\neg\neg\phi \in \Sigma$ اگر و تنها اگر $\phi \in \Sigma$.
۳. اگر $\phi \notin \Sigma$ آنگاه $\phi \notin \Sigma$ و $(\phi \wedge \psi) \notin \Sigma$.
۴. اگر $\neg\phi \in \Sigma$ و $\phi \in \Sigma$ و $\neg\psi \notin \Sigma$ آنگاه $(\phi \wedge \psi) \notin \Sigma$ و $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$.
۵. اگر $\neg\phi \notin \Sigma$ و $\neg\psi \notin \Sigma$ آنگاه $(\phi \wedge \psi) \notin \Sigma$.
۶. اگر $\neg\phi \in \Sigma$ آنگاه $(\phi \wedge \psi) \notin \Sigma$.
۷. اگر $\neg\phi \notin \Sigma$ آنگاه $(\phi \vee \psi) \notin \Sigma$.
۸. اگر $\phi \notin \Sigma$ و $\psi \notin \Sigma$ آنگاه $(\phi \vee \psi) \notin \Sigma$.
۹. اگر $\phi \notin \Sigma$ و $\psi \in \Sigma$ و $\neg\psi \in \Sigma$ آنگاه $(\phi \vee \psi) \in \Sigma$.

اثبات. موارد بالا به سادگی از طریق بخش سوم قضیه (۳) که بسته بودن نسبت به استنتاج را می دهد نتیجه می شود. ما فقط برخی از آنها را می آوریم و باقی را به خواننده می سپاریم.

۱. از اصل $\neg\phi, \phi \Rightarrow$ و قضیه ۳ (۳) نتیجه می شود. توجه کنید که اگر $\psi \Rightarrow$ اثبات شود، آنگاه به نحو بدیهی $\psi \Rightarrow$ را نیز داریم.
۲. یک طرف از $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$ و قضیه ۳ (۳) نتیجه می شود. به طور مشابه طرف دیگر از رشته $\phi \Rightarrow \neg\neg\phi$ نتیجه می شود.
۳. چون ϕ و ψ در Σ هستند (از قسمت ۱ نتیجه می شود)، به وسیله رشته $\phi \wedge \psi \Rightarrow \phi, \psi$ $\neg\psi, \psi$ حداقل یکی از نتایج این رشته در Σ باید وجود داشته باشد. اما طبق

فرضمان $\neg\psi \notin \Sigma$ ، پس $\phi \wedge \psi \in \Sigma$. بخش دوم این مورد توسط مورد بعدی پوشش داده خواهد شد.

۴. طبق رشته $(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\phi$ و این فرض که $\neg\phi \in \Sigma$ داریم $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. □.

قضیه ۵. فرض کنید که Σ و Δ مجموعه‌های طرفین رشته در قضیه ۳ باشند، آنگاه یک ارزش‌دهی v برای $\mathcal{M}_{\{LP\}}$ وجود دارد که $v[\Sigma] \subseteq \mathcal{D}$ و $v[\Delta] \subseteq \{f\}$. یعنی تمام مقدمات آن صادق و تمامی تالی‌های آن کاذب هستند.

اثبات. ارزش‌دهی v را برای هر فرمول از زبان مانند ψ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(\psi) = \begin{cases} t & \psi \in \Sigma, \neg\psi \notin \Sigma \\ f & \psi \notin \Sigma, \neg\psi \in \Sigma \\ \top & \psi \in \Sigma, \neg\psi \in \Sigma \end{cases}$$

طبق مورد ۱ قضیه ۴، تابع بالا برای همه فرمول‌ها تعریف می‌شود و در نتیجه یک تابع کامل روی $\mathcal{W}(L)$ است. ما تنها باید نشان دهیم که ارزش‌دهی که ساخته‌ایم همه شرایط صدق بالا در جداول عملگرها را برآورده می‌کند و یک ارزش‌دهی مشروع در این ماتریس است. برای هر کدام از عملگرها به صورت جداگانه این شرایط را بررسی می‌کنیم.

- (\neg) هدف این است که نشان دهیم به ازای هر ارزش‌ممکنی که $v(\phi)$ داشته باشد، باید داشته باشیم $v(\neg\phi) \in \neg v(\phi)$. سه ارزش‌ممکن داریم که هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱. $v(\phi) = t$: طبق ساخت v خواهیم داشت که $\phi \in \Sigma$ ، قضیه ۴ (۲) نتیجه می‌دهد که $\neg\phi \notin \Sigma$ ، چون این جمله نقیض ϕ است و از فرض داریم $\neg\phi \notin \Sigma$ طبق ساخت v نتیجه می‌گیریم که $v(\neg\phi) = f$ که طبق جدول بالا یعنی داریم $v(\neg\phi) \in \neg v(\phi)$. $\neg t = \neg v(\phi) = \{f\}$

۲. $v(\phi) = f$: طبق ساخت v خواهیم داشت که $\phi \notin \Sigma$ ، قضیه ۴ (۲) نتیجه می‌دهد که $\neg\phi \in \Sigma$ ، چون این جمله نقیض ϕ است و از فرض داریم $\neg\phi \in \Sigma$. طبق ساخت v نتیجه می‌گیریم که $v(\neg\phi) = t$ ، طبق جدول بالا یعنی داریم $v(\neg\phi) \in \neg v(\phi)$. $\neg f = \neg v(\phi)$

یک حساب رشته برای $\{LP\}$ (جاوید جعفری) ۱۶۷

۳. $v(\phi) = T$: در این مورد داریم $\phi \in \Sigma$ و $\neg\phi \in \Sigma$. که مورد اول با قضیه ۴ (۲) نتیجه می‌دهد که $\neg\phi \in \Sigma$ ، در کنار این واقعیت که $\neg\neg\phi$ نقیض $\neg\phi$ است و $\neg\phi \in \Sigma$ است، نتیجه می‌گیریم $v(\neg\phi) = T$. پس در این مورد هم داریم $v(\neg\phi) \in \neg T$.

(۸) -

a. $v(\phi) = f$ یا $v(\psi) = f$: فرض کنید که $v(\phi) = f$ ، آنگاه طبق تعریف $\phi \notin \Sigma$. قضیه ۴ (۳) نتیجه می‌دهد که $\phi \wedge \psi \notin \Sigma$ ، از این نتیجه می‌گیریم $v(\phi \wedge \psi) = f$. در موارد بعدی حالتی که هر دو ارزش برگزیده دارند را بررسی می‌کنیم. حالت دوم نیز به همین طریق اثبات می‌شود.

b. $v(\phi) = T$ و $v(\psi) = t$ یا $v(\psi) = T$ و $v(\phi) = t$: از $v(\phi) = T$ نتیجه می‌شود که $\phi \in \Sigma$ و $\neg\phi \notin \Sigma$ هستند، از $v(\psi) = t$ داریم $\psi \notin \Sigma$ ، قضیه ۴ (۴) نتیجه می‌دهد که $\neg(\phi \wedge \psi)$ و $\phi \wedge \psi$ هر دو در Σ هستند، پس داریم $v(\phi \wedge \psi) = T$. پس در حالتی که یکی از طرفین ارزش t و دیگری ارزش T دارد نیز این ارزش دهی به جدول بالا احترام می‌گذارد.

c. $v(\phi) = t$ و $v(\psi) = t$: از این دو فرض داریم که $\neg\phi \notin \Sigma$ و $\neg\psi \notin \Sigma$. قضیه ۴ (۵) می‌دهد $\neg(\phi \wedge \psi) \notin \Sigma$ ، پس همان‌طور که انتظار می‌رفت، داریم $v(\phi \wedge \psi) = t$.

d. $v(\phi) = T$ و $v(\psi) = T$: فرض به ما می‌دهد $\neg\phi \in \Sigma$ ، قضیه ۴ (۶) می‌دهد $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. حالا $\phi \wedge \psi$ ممکن است در Σ باشد یا نباشد. در حالت اول داریم $v(\phi \wedge \psi) = T$ و در حالت دوم $v(\phi \wedge \psi) = f$. پس در هر دو حالت داریم $v(\phi \wedge \psi) \in \{f, T\}$ همان‌طور که طبق جدول بالا داریم.

- پس برای تمام ۹ حالت ممکن از ارزش‌های $v(\phi)$ و $v(\psi)$ داریم:

$$v(\phi \wedge \psi) \in v(\phi) \bar{\vee} v(\psi)$$

(۷) -

a. $v(\phi) = t$ یا $v(\psi) = t$: فرض کنید $v(\phi) = t$ ، طبق ساخت داریم $\neg\phi \notin \Sigma$ ، قضیه ۴ (۷) نتیجه می‌دهد $\neg(\phi \vee \psi) \notin \Sigma$ ، طبق مورد (۱) همان قضیه داریم $\phi \vee \psi \in \Sigma$ ، در نتیجه همان‌طور که لازم بود داریم $v(\phi \vee \psi) = t$. حالت دوم نیز به همین طریق اثبات می‌شود.

b. $v(\psi) = f$ و $v(\phi) = f$: طبق تعریف داریم $\phi \notin \Sigma$ و $\psi \notin \Sigma$ ، قضیه ۴ (۸) نتیجه می دهد $\phi \vee \psi \notin \Sigma$ ، پس $v(\phi \vee \psi) = f$.

c. $v(\psi) = T$ و $v(\phi) = T$ (یا $v(\psi) = f$ و $v(\phi) = T$): فرض ما مقدمات قضیه ۴ (۹) را می دهد. در نتیجه تالی آن را نیز داریم که یعنی مطابق جدول بالا $v(\phi \vee \psi) = T$.

d. $v(\psi) = T$ و $v(\phi) = T$: از فرض داریم $\phi \in \Sigma$ و از رشته $\phi \vee \psi \Rightarrow \phi$ که $\phi \vee \psi \in \Sigma$ یا $\neg(\phi \vee \psi)$ در Σ هست یا نیست، در حالت اول $v(\phi \vee \psi) = T$ و در حالت دوم $v(\phi \vee \psi) = f$ ، پس در هر حال داریم $v(\phi \vee \psi) \in \{T, f\}$.

قضیه ۶ (تمامیت). اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ آنگاه $\Gamma \models \Delta$.

اثبات. طبق مورد قضیه ۳ مجموعه Σ وجود دارد که $\Sigma \Rightarrow \Delta$. طبق قضیه ۵ یک ارزشدهی وجود دارد که همه اعضای Σ را صادق و همه اعضای Δ را کاذب میبندد، اما چون $\Gamma \subseteq \Sigma$ همه اعضای Γ نیز صادق هستند. پس $\Gamma \models \Delta$.

۵. عطف غیر مثبت و نرمال نبودن {LP}

در اکثر منطق‌ها، عطف و فصل عملگری مثبت به شمار می آیند و نقض عملگری غیر مثبت. عملگرهای مثبت و غیر مثبت رفتاری کاملاً متفاوت با هم دارند، یک قضیه معمول این است که با ترکیب هر چند عملگر مثبت نمی توان عملگری منفی را تعریف کرد. اما مثبت بودن عطف و فصل در {LP} متفاوت است. قبل از پرداختن به آن، تعریفی از عملگر مثبت ارائه می دهیم. این تعریف متعلق به آورن (Avron et al, 2018:13) است.

تعریف ۷ (عملگر مثبت). عملگر n موضعی \circ را مثبت می گوئیم هرگاه به ازای هر مجموعه متغیرها p_1, \dots, p_n داشته باشیم:

$$p_1, \dots, p_n \Rightarrow \circ(p_1, \dots, p_n)$$

رشته $p_1, p_2 \Rightarrow p_1 \vee p_2$ که در {LP} اثبات پذیر است، نشان می دهد که فصل این منطق مثبت است. اما همان طور که گفتیم، چون $p_1, p_2 \Rightarrow p_1 \wedge p_2$ در این منطق اثبات پذیر نیست (ارزش دهی $v(p_1) = v(p_2) = T$ و $v(p_1 \wedge p_2) = f$ را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرد)، عطف آن برخلاف عطف LP یا منطق کلاسیک مثبت نیست.

یک حساب رشته برای $\{LP\}$ (جاوید جعفری) ۱۶۹

این ویژگی ما را به سمت یک مفهوم دیگر، یعنی نرمال بودن منطق می‌برد. آورن در (Avron,2015) تعریفی از عطف و فصل و شرط به دست می‌دهد که اگر منطقی آنها را داشته باشد، آن منطق را یک منطق «نرمال» می‌خواند. ما چون در اینجا شرط نداریم، صرفاً به عطف و فصل می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که $\{LP\}$ یک منطق نرمال نیست. تعریف آورن از فصل با تعریف ما کمی متفاوت است اما در حساب رشته چند تالی با حضور قاعده برش می‌توان نشان داد که این دو معادل هستند.

تعریف ۸.

- عملگر دو موضعی \vee را برای \Rightarrow فاصل می‌نامیم هر گاه:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi, \psi \text{ اگر تنها اگر } \Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \vee \psi$$

- عملگر دو موضعی \wedge را برای \Rightarrow عاطف می‌نامیم هر گاه:

$$\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta \text{ اگر تنها اگر } \Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$$

به سادگی می‌توان دید که عطف و فصل برای منطق کلاسیک و LP عاطف و فاصل هستند. اما این ویژگی برای $\{LP\}$ برقرار نیست:

قضیه ۷. عملگر \vee برای $\{LP\}$ فاصل است، اما \wedge برای آن عاطف نیست.

اثبات. اثبات فاصل بودن \vee سراسر است، هم می‌توان آن را به صورت نظریه برهانی اثبات کرد و هم به صورت سمنتیکی. ما فقط نشان می‌دهیم که \wedge عاطف نیست. فرض کنید که Γ و Δ تهی باشند و فرض کنید ارزش دهی v رشته $\Rightarrow \phi \wedge \psi$ را ارضا کند. در این صورت داریم $v(\phi \wedge \psi) = f$ ، اما ممکن است داشته باشیم $v(\phi) = v(\psi) = T$ که در این صورت رشته $\Rightarrow \phi, \psi$ ارضا نخواهد شد. \square

در تعریف آورن از منطق نرمال، عملگر شرط داشتن هم قید مهمی است. برای آورن، یک عملگر وقتی شرط به حساب می‌آید که قضیه استنتاج برای آن برقرار باشد، بنابراین طبق تعریف او، شرط منطق LP هم در واقع یک شرط واقعی نیست، چرا که قضیه استنتاج برای آن برقرار نیست. اما اگر اجمالاً شرط را کنار بگذاریم و نرمال بودن را با داشتن عاطف و فاصل تعریف کنیم، منطق LP یک منطق نرمال به حساب می‌آید. اما قضیه بالا نشان می‌دهد برای $\{LP\}$ این چنین نیست و این منطق در سطح عمیق‌تری غیرنرمال است، چرا که رفتار عطف کاملاً متفاوتی دارد. در واقع فقط یک طرف ویژگی

عطف را داریم. عطف این منطق قابلیت حذف را دارد، اما قابلیت معرفی شدن (حداقل بدون قید و شرط) را ندارد.

۶. برگشت پذیری قواعد و حذف برش

یک ویژگی مهم نظریه برهانی برای حساب رشته‌ها خاصیت برگشت پذیری قواعد است. یک قاعده را برگشت پذیر می‌گوییم هرگاه بتوان از نتیجه آن، مقدمات آن را نیز نتیجه گرفت. حساب رشته‌های مختلفی برای منطق کلاسیک ارائه شده است که دارای قواعد برگشت پذیر هستند (بنگرید به (حسینی، ۱۴۰۳:۵۰)). همچنین حساب رشته‌ای که برای منطق LP معرفی شده، دارای قواعد برگشت پذیر است (Avron, 2015). با این حال علیرغم شباهت زیاد این دو منطق حساب رشته $G_{\{LP\}}$ دارای برخی قواعدی است که برگشت پذیر نیستند. هرچند برخی قواعد آن برگشت پذیر هستند، برای مثال قاعده $[V \Rightarrow]$ برگشت پذیر است. فاصل بودن V در بخش قبل در واقع اثبات برگشت پذیری این قاعده را نشان می‌دهد. اما قاعده $[A \Rightarrow]$ برگشت پذیر نیست. در منطق کلاسیک و همچنین LP، چون $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ اثبات پذیر است، با اعمال قاعده برش روی این رشته و $\Delta, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$ می‌توان مقدمه قاعده $[A \Rightarrow]$ ، یعنی $\Delta, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta$ را نتیجه گرفت. اما چون این رشته در $\{LP\}$ اثبات نمی‌شود، نمی‌توان این کار را انجام داد. برگشت ناپذیری این قاعده به لحاظ سمنتیکی نیز به سادگی اثبات می‌شود. اثبات آن معادل است با اثبات عاطف نبودن \wedge که در بخش قبل آمد. توجه کنید که رشته موجود در طرفین تعریف عاطف بودن در واقع مقدم و تالی قاعده سمت چپ عطف است. بنابراین یک ضعف این حساب رشته نداشتن ویژگی برگشت پذیری است. اینکه بتوان قواعد برگشت ناپذیری این سیستم را با قواعدی برگشت پذیر جایگزین کرد مسئله‌ای چندان روشن نیست.

یک ویژگی مهم دیگر حساب رشته‌ها حذف پذیری برش است. به این معنی که اگر رشته‌ای در این حساب اثبات پذیر باشد باید برهانی داشته باشد که در آن قاعده برش بکار نرفته است. نویسندگان حدس می‌زند که برش در این حساب رشته حذف پذیر است و به احتمال زیاد با تکنیک‌های رایج نظریه برهانی مانند استقرا روی فرمول‌ها طول برهان بتوان اثباتی برای این قضیه آورد. البته تکنیک رایج معمولاً منجر به چک کردن حالات متعدد و اثباتی بسیار طولانی می‌شود. یک راه حل ساده‌تر برای حذف برش گره می‌خورد به ویژگی برگشت پذیری. آورن در (Avron, 2015) نشان داده که در صورت داشتن

یک حساب رشته برای $\{LP\}$ (جاوید جعفری) ۱۷۱

برگشت‌پذیری می‌توان برهانی کوتاه برای قضیه برش ارائه داد. این مشاهده ما را به دوباره به پرسش قبل در مورد بازگشت‌پذیری سوق می‌دهد: اگر بتوانیم قواعد $G_{\{LP\}}$ را با قواعدی برگشت‌پذیر جایگزین کنیم پاسخی ساده برای مسئله حذف برش این سیستم نیز خواهیم داشت.

۷. نتیجه‌گیری

گفتیم که $\{LP\}$ منطقی است که به با ابزار سمت‌بندی به وسیله ماتریس‌های نامعین معرفی شده است اما از جنبه نظریه برهانی چندان مورد مطالعه قرار نگرفته است. ما در اینجا یک حساب رشته برای این منطق معرفی کردیم و صحت و تمامیت آن را اثبات کردیم. نشان دادیم که در بخش تنها فصلی این منطق دقیقاً مانند منطق کلاسیک عمل می‌کند اما رفتار عطف آن کاملاً متفاوت است. در واقع نشان دادیم که عطف این منطق برخلاف عطف بسیاری از منطق‌های دیگر یک عملگر مثبت نیست. همچنین نشان دادیم طبق یک تعریف عطف این منطق به معنای متداول عطف نیست چرا که مهم‌ترین ویژگی‌های عطف را ندارد. بنابراین طبق یک تلقی این منطق یک منطق «غیرنرمال» به حساب می‌آید. در بخش آخر به برگشت‌ناپذیری قواعد حساب رشته معرفی شده پرداختیم و نشان دادیم این حساب رشته برگشت‌پذیر نیست.

یکی ویژگی مهم دیگر حساب رشته‌ها حذف‌پذیری برش است. گفتیم حدس می‌زنیم برش در این سیستم حذف‌پذیر باشد. به نحو جالبی مسئله حذف برش نیز با مسئله برگشت‌پذیری گره می‌خورد. با استفاده از تکنیک‌های خاصی اگر بتوان سیستمی بازگشت‌پذیر برای $\{LP\}$ ارائه داد احتمالاً به سادگی قضیه حذف برش را نیز برای آن خواهیم داشت.

کتاب‌نامه

حسینی، داود. (۱۴۰۳) نظریه برهان: حساب رشته: چارچوبی برای معنا و منطق (چاپ اول، ۳۷۶-۳۸۴ ص.). تهران: سمت.

Arieli, O., & Avron, A. (2015). Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics. In J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, & S. Dutta (Eds.), *New Directions in Paraconsistent Logic* (pp. 91–129). Springer India.

- Avron, A. (2005). Non-deterministic Semantics for Logical Systems. *Handbook of Philosophical Logic*, 16(14), 227–304.
- Avron, A., Arieli, O., & Zamansky, A. (2018). *Theory of Effective Propositional Paraconsistent Logics*. Studies in Logic, College Publications.
- Carnap, R. (1943). *Formalization of Logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Jafari, J. (2025). Non-Classical Beasts Under the Carpet. *Topoi*, 44, 1–8.
- Priest, G. (1979). Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 8(1), 219–241.