منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۸، ۱۲۱ –۱۳۵

جنبه‌های توپولوژیک از منطق مرتبهٔ اول کلاسیک

کریم خانکی*

چکیده

منطق مرتبه اول کلاسیک رایج‌ترین منطق در کاربردهای ریاضیات و همچنین در مطالعه بنیادهای منطقی می‌باشد. از دیر باز تنها ارتباط بین منطق و توپولوژی ریاضی محدود به مفهوم فضاهای تایپ بوده و پیوندهای دیگری بین این دو حوزه متصور نبوده است. اخیرا پیوندهای اساسی بین این دو شاخه (یعنی منطق و توپولوژی) ایجاد شده است که کاربردهای زیادی در هر دو حوزه منطق و همچنین در توپولوژی را موجب شده‌اند. در این مقاله به مطالعه برخی از مهمترین پیوندهای این دو شاخه از ریاضیات و همچنین کاربردهای آنها خواهیم پرداخت. یکی از مفاهیم کلیدی در منطق ریاضی و نظریه مدل‌ها مفهوم پایداری می‌باشد که بیانی کاملا ترکیبیاتی دارد. در این مقاله نشان می‌دهیم که این مفهوم معادل یک مفهوم توپولوژیک برای مجموعه مشخصی از توابع می‌باشد و با استفاده از آن قضیه‌ای بنیادین در نظریه پایداری شلاح را ثابت می‌کنیم. همچنین ارتباط بین مفهوم وابستگی و یک خاصیت توپولوژیک از مجموعه‌ای از توابع را بیان می‌کنیم و اثباتی توپولوژیک از برخی از دستاوردهای مهم نظریه مدل‌ها را ارائه خواهیم داد. برخی از نتایج ارائه شده در این مقاله در هر دو حوزه منطق و توپولوژی کاملا جدید هستند و احتمال کاربردهای بیشتر از آنها در مطالعات آتی متصور می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: منطق مرتبه اول کلاسیک؛ تعریف‌پذیری؛ پایداری؛ خاصیت وابستگی؛ هم‌ارث

---

* دکترای ریاضی، استادیار دانشگاه صنعتی اراک، اراک (نویسندهٔ مسئول)، khanaki@arakut.ac.ir
تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۴/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۸

۱. مقدمه

آغاز منطق تمایز بین صورت و معنا است. منطق مرتبه اول کلاسیک به خوبی این تمـایز را تبیین کرده است و نتایج مهم و شگفت انگیزی را به هر دو حوزه‌ی ریاضیات و مبانی منطق تقدیم کرده است. یکی از امکان‌های فراهم شده از ایـن تمـایز، مطالعـه صـوری قضـایا و فرمول‌ها و بدست آوردن نتایجی در معناشناسی و نظریه مدل‌هـا مـی‌باشـد. در ایـن مقالـه ارتباط ذاتی بین صورت و معنا با حوزه‌ی دیگری از ریاضیات موسوم بـه "توپولـوژی" را مطالعه می‌کنیم. از پیدایش نظریه مدل‌ها ارتباط ذاتی مجموعه‌های خاصی از فرمول‌ها، به نام تایپ‌ها، بـا مفهـوم دیگـری، بـه نـام فضـای توپولوژیـک اِسـتون، در توپولـوژی عمـومی شناخته‌شده بوده‌است. در واقع، خواص نظریه مدلی از تئوری‌های منطق مرتبه اول در قالب این فضاهای توپولوژیک قابل ارائه و مطالعه مـی‌باشـند. بـرای چنـدین دهـه تنهـا ارتبـاط کشف‌شده بـین منطـق ریاضـی بـا توپولـوژی، منحصـر بـه توپولـوژی اسـتون از فضـای تایپ‌ها بود. اخیرا پیوندهای عمیق‌تـری بـین منطـق ریاضـی و نظریـه مـدل‌هـا و مفـاهیم توپولوژیک کشف شده‌اند که ضمن آشکار کردن جنبه‌های دیگری از منطق ریاضی، نتـایج مهم و شگفت‌انگیزی را هم به خود منطق و نظریـه مـدل‌هـا و هـم بـه دیگـر حـوزه‌هـای ریاضیات تقدیم کـرده‌انـد. در ایـن مقالـه بـه برخـی از جدیـدترین و مهمتـرین قضـایا و نتایج بدست‌آمده در این موضوع خواهیم پرداخت و پیوندهای اساسی بین این دو حوزه از ریاضیات (یعنی منطق و توپولوژی) که تصور رایج بر این بوده است که ارتباط چندانی بین آنها وجود ندارد را ارائه خواهیم داد. در ابتدا از منظر کلاسیک، مروری کوتاه بر مفاهیم اولیه از جمله فضای تایپ‌ها یا فضای توپولوژی استون خواهیم داشت و سپس ارائه‌ای مدرن از این مفاهیم خواهیم داشت که برای درک بهتـر ارتبـاط بـین نظریـه مـدل‌هـا و توپولـوژی ضروری است. نتایج و مشاهدات اصلی این مقاله از آنجایی آغاز خواهند شـد کـه مفـاهیم ترکیبیاتی در نظریه مدل‌ها، از جملـه خاصـیت ترتیـب و خاصـیت وابسـتگی، بـا مفـاهیم توپولوژیک روی فضاهای خاصی از توابع جایگزین می‌شوند. در واقع، نشـان خـواهیم داد کـه بسـیاری از مفـاهیم ترکیبیـاتی مـورد اسـتفاده در نظریـه پایـداری شـلاح، جنبـه‌هـای توپولوژیکی ناشناخته‌ای دارند که منجر بـه درک بهتـر نظریـه مـدل‌هـا و همچنـین نتـایج شگفت‌انگیزی در حوزه‌های مختلف می‌شوند. یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مـدل‌هـا، مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها است. نشان خواهیم داد که ایـن مفهـوم معـادل یـک مفهـوم توپولوژیک، یعنی پیوستگی مجموعه خاصی از توابع، می‌باشد. همچنین یک مفهوم دیگر از

تعریف‌پذیری ارائه خواهیم داد و بیان خواهیم کرد که این مفهوم نیز معادل یک مفهوم دیگر توپولوژیک است. در نهایت نتایجی از این مطالعه را بیان خواهیم کرد که تعمیمی از نتایج کلاسیک می‌باشند و بیان خواهیم کرد که این پیوندها منجر به حل مسائل مهمی خواهندشد که در این مقاله و همچنین در کارهای آتی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. مطالب مقاله به شرح زیر است. ابتدا مفاهیم اولیه و پیش‌نیازها را در فصل ۲ ارائه می‌دهیم. بیان مسائل و نتایج اصلی این مقاله از فصل ۳ آغاز می‌شود و نتایج در فصول ۳ و۴ و ۵ ارائه خواهندشد. در فصل ۳ مفهوم پایداری و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژیک را مطالعه می‌کنیم. در فصل ۴ مفهوم وابستگی و پیوند آن با توپولوژی و همچنین نتایج آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و سرانجام در فصل ۵ یکی از دستاوردهای جدید مفهوم وابستگی در نظریه مدل‌ها را ارائه خواهیم‌داد.

۲. فضای تایپ‌ها

در این فصل برخی از مفاهیم اولیه منطق و نظریه مدل‌های کلاسیک را بیان می‌کنیم و این مفاهیم را در یک زبان توپولوژیک که مناسب با اهداف این مقاله است ارائه خواهیم داد. از آنجا که بحث این مقاله منطق مرتبه اول کلاسیک است، فرض بر این است که خواننده با مقدمات منطق از قبیل زبان، فرمول و مدل آشنایی دارد. (برای اطلاعات بیشتر به کتاب‌های مقدماتی منطق ریاضی یا نظریه مدل‌ها مراجعه کنید.)

تایپ یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مدل‌ها می‌باشد. در واقع این مفهوم، ناتوانی منطق کلاسیک برای بیان خواصی با جمله‌های با طول نامتناهی را جبران می‌کند. اکنون تعریف دقیقی از این مفهوم را ارائه می‌دهیم. فرض کنید L یک زبان منطق مرتبه اول، T یک تئوری کامل در این زبان، و n یک عدد طبیعی دلخواه باشند. یک n–تایپ برای تئوری T (یا یک n–تایپ روی مجموعه تهی) مجموعه‌ای است از فرمول‌هایی با حداکثر n متغیر آزاد که با تئوری T سازگار هستند. اگر این مجموعه نسبت به رابطه شمول ($\subseteq$) ماکزیمال باشد، آن را تایپ کامل گویند. تایپ‌ها را معمولا با p یا q نشان می‌دهیم. اگر M یک مدل از تئوری T باشد و $a \in M$ آنگاه مجموعه همه‌ی L–فرمول‌های $\varphi(x)$ بطوری که $\varphi(a)$ در M درست باشد را تایپ a می‌نامیم و با نماد $tp(a)$ نشان می‌دهیم. بوضوح تایپ‌هایی از این نوع کامل هستند.

اگـر $L_M = L \cup \{a: a \in M\}$ و T_M مجموعـه همـه L_M–جملـه‌هـایی باشـد کـه در M درست هستند، آنگاه یک n–تایپ برای تئوری T_M را یک n–تایپ روی M می‌نامیم. بطـور مشابه اگر N یک مدل از T_M باشد و $a \in N$، آنگاه مجموعه همـه L_M–فرمـول‌هـای $\varphi(x)$ بطوری که $\varphi(a)$ در N درست باشد را تایپ a می‌نامیم و با نماد $tp(a/M)$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه n–تایپ‌های کامل روی M را با $S_n(T_M)$ نمایش می‌دهیم و فضای تایپ‌های روی M می‌نامیم. بطور مشابه، مجموعه همه n–تایپ‌هـای کامـل روی مجموعـه تهـی بـا $S_n(T)$ نمایش داده می‌شود.

استفاده از کلمه "فضا" در تعریف فوق بی‌دلیل نیست. در واقع مجموعه همه تایپ‌های کامل تشکیل یک فضای توپولوژیک می‌دهند با تعریفی که در ادامه ارائه خواهد شد. بـرای هـــر فرمـــول $\varphi(x)$ بـــا n متغیـــر آزاد، مجموعـــه $[\varphi] = \{p \in S_n(T_M): \varphi \in p\}$ را تعریف مـی‌کنـیم. مجموعـه همـه‌ی $[\varphi]$هـا تشـکیل پایـه‌ای بـرای یـک توپولـوژی روی $S_n(T_M)$ می‌دهند که به آن توپولوژی منطقی (یا توپولوژی اِستون) روی $S_n(T_M)$ می‌گویند. بررسی این مطلب که مجموعه مذکور خواص پایـه یـک توپولـوژی را دارد سـاده اسـت. توپولوژی منطقی دارای خواص مهمـی اسـت از جملـه اینکـه ایـن فضـا فشـرده و تمامـا ناهمبند است. فشردگی این فضـا معـادل اسـت بـا قضـیه فشـردگی در منطـق مرتبـه اول کلاسیک، و دو ارزشی بودن منطق کلاسیک (یعنی $1-0$) منجر می‌شود که این فضا تمامـا ناهمبند باشد. (برای تعریف مفاهیم "فشردگی" و "تماما ناهمبند" به کتاب‌های توپولـوژی عمومی مراجعه کنید.)

بدلیل اهمیت مطلب فوق آنرا بصورت یک گزاره ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱: فضای توپولوژیک $S_n(T_M)$ فشرده و تماما ناهمبند است.

فشردگی فضای تایپ‌ها برای هر منطقی کـه قضـیه فشـردگی دارد برقـرار اسـت، امـا ضرورتی ندارد که این فضا برای منطق‌های غیر کلاسیک تماما ناهمبند باشد.

تعاریف فوق کلاسیک هستند و زبان مناسبی برای اهداف این مقاله که ایجاد پیوند بـین منطق و توپولوژی است نمی‌باشند. اکنون این مفاهیم را در قالب زبانی مناسب بیان می‌کنیم. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول با n متغیر در زبان L و M یـک L–سـاختار باشـد. مـی‌تـوان تعبیر $\overset{M}{\varphi}$ در M را بصورت یک تابع $\overset{M}{\varphi}: M^n \to \{0,1\}$ در نظـر گرفـت کـه $\overset{M}{\varphi}(a) = 1$ اگر $\varphi(a)$ در M درست باشد و $\overset{M}{\varphi}(a) = 0$ در غیـر اینصـورت. بطـور مشـابه مـی‌تـوان تایپ‌ها را بصورت زیر تعریف کرد. فرض کنید $L_{M,n}$ مجموعه همه L_M–فرمول‌هـای بـا n

متغیر آزاد باشد. یک n–تایپ کامل p روی M تابعی است مانند $I_p: L_{M,n} \to \{0,1\}$ که $I_p(\varphi) = 1$ اگر $\varphi \in p$، و $I_p(\varphi) = 0$ در غیر اینصورت. تابع I_p که به این صورت تعریف می‌شود دارای خواص جالبی است. مجموعه همه توابع به صورت I_p (که p یک n–تایپ کامل است) را با $\sigma(M)$ نمایش می‌دهیم و آن را با توپولوژی موسوم به توپولوژی ضعیفِ ستاره‌دار بصورت زیر مجهز می‌کنیم: $I_{p_\alpha} \to I_p$ اگر و فقط اگر برای هر L_M–فرمول φ با n متغیر آزاد داشته باشیم $I_{p_\alpha}(\varphi) \to I_p(\varphi)$. به آسانی می‌توان نشان داد که $\sigma(M)$ با فضای توپولوژی منطقی $S_n(T_M)$ یکسان است. این مطلب را در گزاره زیر تصریح می‌کنیم.

گزاره ۲: (۱) نگاشت $p \to I_p$ یک تناظر دوسویی بین $S_n(T_M)$ و $\sigma(M)$ می‌باشد.

(۲) اگر $p \in S_n(T_M)$ یک تایپ باشد آنگاه یک توسیع مقدماتی N از M و یک عنصر $a \in N$ وجود دارد بطوری که تایپ a روی M دقیقا p می‌باشد؛ یعنی $p = tp(a/M)$.

در فصل بعد یکی از مهمترین مفاهیم نظریه مدل‌ها به نام پایداری را که تعریفی ترکیبیاتی دارد مطالعه خواهیم کرد و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژیک را مشخص می‌کنیم.

۳. خاصیت ترتیب و محک گروتندیک

مفهوم پایداری یکی از مرکزی‌ترین مفاهیم در نظریه مدل‌ها می‌باشد. این مفهوم که توسط ساهارون شلاح (Shelah, 1971: 271-362) در اوایل دهه ۱۹۷۰ معرفی گردید، کاربردهای فراوانی در نظریه مدل‌ها و نیز در شاخه‌های دیگر ریاضیات داشته است. پیدایش مفهوم پایداری یک تئوری (و سپس پایداری یک فرمول) بر مبنای شمردن تعداد تایپ‌های آن تئوری (یا تعداد تایپ‌های موضعی) شکل گرفته است، اما خیلی زود ارتباط این مفهوم با یک مفهوم ترکیبیاتی مشخص شد. از آن زمان تا این اواخر، فرض بر این بوده است که مفهوم پایداری ماهیتی کاملا ترکیبیاتی دارد و هیچ ارتباطی با حوزه‌های دیگر ریاضیات ندارد. مشاهدات اخیر این فرض را نقض می‌کند و نشان می‌دهد که این مفهوم ماهیتی توپولوژیک نیز دارد. در ادامه به این مطلب خواهیم پرداخت.

ابتدا برخی از مفاهیم اولیه را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک L–فرمول و M یک L–ساختار باشد. یک φ–تایپ (بامتغیر x) روی M عبارت است از مجموعه همه فرمول‌های $\varphi(x,a)$ که در M درست هستند و $a \in M$. $S_\varphi(M)$ را مجموعه همه φ–تایپ (با متغیر x) روی M در نظر می‌گیریم و آن را

فضای φ–تایپ‌ها (با متغیر x) روی M می‌نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که این فضا با توپولوژی منطقی که از فضای تایپ‌های کامل به ارث می‌برد، یک فضای توپولوژیک فشرده است. فرض کنید $\varphi^*(x,y)$ فرمولی باشد که از تغییر نقش متغیرهای x,y از فرمول $\varphi(x,y)$ حاصل شده باشد؛ یعنی $\varphi^*(x,y)=\varphi(y,x)$. بطور مشابه φ^*–تایپ‌های روی M و همچنین فضای توپولوژی $S_{\varphi^*}(M)$ تعریف می‌شوند.

اکنون تعریف کلاسیک از مفهوم پایداری یک فرمول را ارائه می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک L–فرمول و M یک L–ساختار باشد.

۱. گوییم $\varphi(x,y)$ روی M خاصیت ترتیب دارد اگر دنباله‌های a_n, b_n از عناصر M موجود باشند بطوریکه:

$$\lim_m \lim_n \varphi(a_n,b_m) \neq \lim_n \lim_m \varphi(a_n,b_m).$$

۲. فرمول $\varphi(x,y)$ را پایدار در M گوییم اگر $\varphi(x,y)$ روی M خاصیت ترتیب نداشته باشد.

قضیه ۳: فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک فرمول در زبان L، T یک L–تئوری کامل باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x,y)$ در هر مدل M از T پایدار است.

۲. تعداد φ–تایپ‌ها (با متغیر x) روی هر مدل M از T برابر کاردینال M است؛ یعنی $|S_\varphi(M)|=|M|$.

قضیه فوق کلاسیک است و در ۱۹۷۱ بوسیله شلاح (Shelah, 1971: 271-362) اثبات شده‌است. یادآوری می‌کنیم که تعریف اصلی پایداری بر مبنای شمردن تایپ‌ها می‌باشد، یعنی شرط (۲) در قضیه فوق، گرچه با گذشت زمان، تعریف ارائه شده بوسیله خاصیت ترتیب نیز رایج گشته است. توجه داریم که قضیه فوق پایداری در یک تئوری T را بیان می‌کند و در مورد پایداری در یک مدل صحبت نمی‌کند. در این مقاله دستاوردی قویتر از قضیه فوق را ثابت خواهیم کرد؛ یعنی نشان می‌دهیم که یک فرمول $\varphi(x,y)$ در یک L–ساختار M پایدار است اگر و فقط اگر $|S_\varphi(M)|=|M|$. در واقع، مطلب اخیر از دو جنبه موضعی است؛ اولا پایداری یک فرمول (و نه یک تئوری) را بیان می‌کند، دوما پایداری در یک مدل (و نه همه مدل‌ها) را بررسی می‌کند؛ بنابراین مطلبی کاملا جدید است. برای اثبات تعمیم قضیه فوق می‌بایست از مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها که

بطور مستقل توسط گایفمن (Gaifman, 1976: 223-306) و شلاح (Shelah, 1971: 271-362) معرفی شده است استفاده کنیم. در ادامه مفهوم تعریف‌پذیری تایپ‌ها را ارائه می‌دهیم. تایپ p در $S_\varphi(M)$ را تعریف‌پذیر (روی M)گوییم اگر یک L_M–فرمول $\theta(x)$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a \in M$، $\varphi(x,a)$ متعلق به p است اگر و فقط اگر $\theta(a)$ در M درست باشد. با زبانی که بوسیله توابع تعریف کردیم این مطلب را می‌توان به این صورت بیان کرد: $\theta(a) = \varphi(p,a)$ که در آن $\varphi(p,a) = 1$ اگر $\varphi(x,a)$ متعلق به p باشد، و $\varphi(p,a) = 0$ در غیر اینصورت.

بنابراین می‌توان یک مجموعه A شامل همه توابعی به صورت $\varphi^a: S_{\varphi^*}(M) \to \{0,1\}$ را در نظر گرفت که $a \in M$ و $\varphi^a(p) = 1$ اگر $\varphi(a,p) = 1$، و $\varphi^a(p) = 0$ در غیر اینصورت. توابع موجود در A پیوسته هستند و نقشی کلیدی در ادامه خواهند داشت.

فرض کنید M^* یک توسیع مقدماتی اِشباع از M باشد. یک تایپ $p(x)$ در $S_\varphi(M^*)$ را متناهیا ارضاء شده در M گوییم اگر هر فرمول $\sigma(x)$ در M محقق شود، یعنی عنصر $b \in M$ موجود باشد که $\sigma(b)$ درست باشد. نام دیگر تایپ‌های متناهیا ارضاء شده در M تایپ‌های هم‌ارث می‌باشد و این تایپ‌ها کاربردهای زیادی در نظریه مدل‌ها دارند. ارتباط مفاهیم فوق با تایپ‌های متناهیا ارضاء شده اولین بار توسط آناند پیلی (Pillay, 1982: 147-160) در ۱۹۸۲ مشخص شد. برای توضیحات بیشتر به مقاله (Pillay, 2016: 1-6) مراجعه کنید.

گزاره ۴ (پیلی): یک تابع $f: S_{\varphi^*}(M) \to \{0,1\}$ در بستار توپولوژیک مجموعه A (با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) قرار دارد اگر و فقط اگر یک تایپ $p(x)$ در $S_\varphi(M^*)$ که متناهیا ارضاء شده در M است موجود باشد که $f(q) = \varphi(p,q)$ برای هر $q \in S_{\varphi^*}(M)$.

اولین بار آناند پیلی متوجه ارتباط بین پایداری در یک مدل و تعریف‌پذیری تایپ‌های هم‌ارث شد. در واقع، گزاره فوق امکان ترجمه مفاهیم نظریه مدل‌ها به مفاهیم توپولوژیک و برعکس را فراهم می‌کند.

گزاره ۵ (محک گروتندیک): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد و X_0 یک زیرمجموعه چگال از آن باشد. آنگاه شرایط زیر برای یک مجموعه A از توابع پیوسته و کراندار روی X معادل هستند:

۱. هر تابع در بستار مجموعه A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) پیوسته است.

۲. مجموعه A کراندار است و برای هر دنباله $f_n \in A$ و هر دنباله $x_n \in X_0$ حدهای مکرر در صورت وجود برابر هستند؛ یعنی

$\lim_m \lim_n f_m(x_n) \neq \lim_n \lim_m f_m(x_n).$

اکنون از ترکیب محک گروتندیک و مشاهد پیلی، می‌توان نتیجه زیر در مورد تعریف‌پذیری تایپ‌های هم‌ارث را بدست آورد.

قضیه ۶ (قضیه بنیادین نظریه پایداری شلاح): فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک L–فرمول و M یک L–ساختار باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x,y)$ در M پایدار است.

۲. هر φ–تایپ هم‌ارث در $S_\varphi(M^*)$ تعریف پذیر روی M است.

۳. تعداد φ–تایپ‌های هم‌ارث در $S_\varphi(M^*)$ برابر کاردینال M است.

برهان: با توجه به محک گروتندیک اگر خاصیت ترتیب وجود نداشته باشد آنگاه هرتابع در بستار مجموعه A پیوسته است. اکنون با توجه به ارتباط بین تعریف‌پذیری تایپ‌های هم‌ارث و پیوستگی توابع در بستار A، بوضوح (۱) و (۲) معادل هستند. اگر هرتاپ هم‌ارث تعریف‌پذیر باشد آنگاه به وضوح تعداد این تایپ‌ها حداکثر برابر کاردینال M است زیرا تعداد L_M–فرمول‌ها حداکثر برابر کاردینال M است. اینکه شرط (۳) شرط (۱) را نتیجه می‌دهد یک مطلب شناخته شده و کلاسیک است.

تذکر: در انتهای این فصل ذکر چند نکته ضروری است.

۱. همانطور که در بالا اشاره شد، مفهوم پایداری در یک تئوری و مفهوم پایداری یک فرمول (یا پایداری موضعی) توسط شلاح ارائه گردید، اما اولین بار مفهوم پایداری (فرمول‌های بدون سور) در یک مدل توسط کریوین و مائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) در مقاله معروف آنها در زبان نظریه فضاهای باناخ ارائه گردید. در واقع، مفهوم پایداری یک فرمول در یک مدل از دو جنبه موضعی است؛ اول اینکه پایداری برای یک فرمول است و نه یک تئوری، و دوم اینکه پایداری در یک مدل است و نه در تمام مدل‌های یک تئوری.

۲. به وضوح تعریف‌پذیری تایپ‌های هم‌ارث در $S_\varphi(M^*)$ تعریف‌پذیری تایپ‌ها در $S_\varphi(M)$ را نتیجه می‌دهد (زیرا هر تایپ در مجموعه اخیر، متناهیا ارضاء شونده در M می‌باشد) اما برعکس برقرار نیست. در واقع بن‌یاکوف در مقاله (Ben Yaacov, 2014: 491-496) نشان داد که پیش‌فشردگی مجموعه A نتیجه می‌دهد که φ در M پایدار است، ولی نتوانست ثابت کند که پایداری φ نیز پیش‌فشردگی مجموعه A را نتیجه می‌دهد.

درواقع همان‌طور که قبلا اشاره کردیم، دوطرفه بودن این مطلب (در زبان نظریـه مـدل‌هـا) اولین بار توسط پیلی مشاهده شد.

۳. ارتباط بین پایداری یک فرمول در یک مدل و پیوستگی توابع بـرای منطـق‌هـای بـا ارزش‌های پیوسته توسط خوزه یووینو در مقاله (Iovino, 1999: 1595-1600) مشـاهده شـد. در واقع مشاهده یووینو معادل محک گروتندیک می‌باشـد، البتـه بیـان صـریح و روشـن از ارتباط بین عدم وجود خاصیت ترتیب و مفهوم تایپ‌های هم‌ارث در کار او دیده نمی‌شود.

در فصل بعد یکی دیگر از خواص ترکیبیاتی در نظریه مدل‌ها موسوم به "وابسـتگی" را مطالعه می‌کنیم و نشـان مـی‌دهـیم کـه ایـن مفهـوم نیـز بـا مفـاهیم توپولوژیـک ارتبـاطی نزدیک دارد.

۴. خاصیت وابستگی و محک بورگین-فرملین-تالاگراند

در این فصل مفهوم وابستگی یک فرمول در یک مدل را مطالعه می‌کنیم. این مفهـوم کـاملا جدید است و نتایج حاصل از آن تعمیمی از همه‌ی دستاوردهای پیشین در مورد وابسـتگی در یک تئوری در نظریه مدل‌ها می‌باشد. در ادامه این تعریف را ارائه می‌دهیم.

تعریف: یک فرمول $\varphi(x,y)$ خاصیت وابستگی در مدل M دارد اگر برای هـر دو عـدد حقیقی $r<s$ و هر دنباله (a_n) از عناصر M، زیرمجموعه هـای متنـاهی و مجـزا از اعـداد طبیعی مانند E,F وجود داشته باشند بطوریکه

$$\{b\in M:\varphi(a_n,b)\leq r,\qquad \forall n\in E\}\cap\{b\in M:\varphi(a_n,b)\geq s,\forall n\in F\}=\emptyset.$$

اگر فرمول $\varphi(x,y)$ در M وابسته نباشد گوییم خاصیت استقلال در M دارد.

تذکر: ذکر چند نکته در مورد مفهوم فوق ضروری است.

۱. تعریف کلاسیک خاصیت وابستگی در نظریه مدل‌ها برای یک تئوری ارائه شده‌است (یعنی برای همه مدل‌های آن تئوری)، ولـی در اینجـا ایـن مفهـوم فقـط بـرای یـک مـدل ارائه گردیده‌است. بنابراین، مفهوم فوق از دو جنبه موضـعی اسـت: اول اینکـه بـرای یـک فرمـول بیـان شـده اسـت، و دوم اینکـه فقـط بـرای یـک مـدل تعریـف شـده اسـت. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که یک فرمول φ خاصیت وابستگی برای یک تئوری T دارد (به معنای رایج آن در نظریه مدل‌ها) اگر و فقط اگر این فرمـول در هـر مـدل از تئـوری T خاصیت وابستگی داشته باشد.

۲. اگر M یک مدل ω-اِشباع باشد، آنگاه φ خاصیت وابستگی برای یک تئوری T دارد اگر و فقط اگر φ در M خاصیت وابستگی داشته باشد.

۳. خاصیت وابستگی در یک مدل نسبت به متغیر حساس است، به این معنا که، فرمول $\varphi(x,y)$ می‌تواند در یک مدل وابسته باشد اما فرمول $\varphi^*(x,y)=\varphi(y,x)$ در آن مدل وابسته نباشد. برای مشاهده مثالی از این مطلب به (Khanaki and Pillay, 2018) رجوع کنید.

۴. مفهوم وابستگی در یک مدل اولین‌بار توسط خانکی در مقاله (Khanaki, 2015) ارائه گردید. این مفهوم پیوندهایی با آنالیز تابعی دارد و کاربردهایی برای آن ارائه شده است. یادآوری می‌کنیم که ارتباط بین وابستگی در نظریه مدل‌ها و نظریه یادگیری برای زمانی طولانی است که شناخته شده است.

اکنون یکی از دستاوردهای مهم در حوزه فضاهای تابعی را ارائه می‌دهیم و پیوند آن با مفهوم وابستگی در یک مدل را بیان می‌کنیم.

گزاره ۷ (محک بورگین–فرملین–تالاگراند): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد، و A یک زیرمجموعه از توابع پیوسته و کراندار روی X باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. فرض کنید $r<s$ و (f_i) دنباله‌ای از توابع در A باشد. آنگاه یک زیرمجموعه I از اعداد طبیعی وجود دارد بطوریکه

$$\{x\in X: f_i(x)\le r,\ \forall i\in I\}\cap\{x\in X: f_i(x)\ge s, \forall i\notin I\}$$

مجموعه‌ای تهی است.

۲. هر دنباله از توابع در A دارای زیردنباله‌ای همگرا است (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای).

علاوه بر این اگر A شمارا باشد، آنگاه (۱) و (۲) با شرایط زیر نیز معادل هستند.

۳. هر تابع در بستار توپولوژیک A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) یک تابع بورل است.

۴. هر تابع در بستار توپولوژیک A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) برابر با حد یک دنباله از توابع در A است.

۵. بستار A دارای کاردینال کوچکتر از $2^{2^{\aleph_0}}$ است.

گزاره فوق یکی از دستاوردهای بورگین، فرملین و تالاگراند در مقاله (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, 1978: 845-886) می‌باشد، که کاربردهای زیادی در آنالیز تابعی دارد. اکنون این گزاره را به زبان نظریه مدل‌ها ترجمه می‌کنیم و نتایج مطلوب را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۸: شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\varphi(x, y)$ در M وابسته است.

۲. هر دنباله (a_n) از عناصر M یک زیردنباله (a_{m_n}) وجود دارد بطوریکه برای هر $b \in M^*$، مقادیر ارزشی از دنباله $\varphi(a_{m_n}, b)$ سرانجام عددی ثابت می‌شود، به عبارتی دیگر این دنباله همگرا است.

علاوه بر این اگر M شمارا باشد، آنگاه (۱) و (۲) با شرایط زیر نیز معادل هستند:

۱. هر $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاءمی‌شود بورل تعریف‌پذیر روی M است؛ یعنی $\{q \in S_{\varphi^*}(M): \varphi(x, b) \in p,$ برای هر $b \in M^*$ که q را ارضاء می‌کند$\}$ مجموعه‌ای بورل است.

۲. برای هر $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاء می‌شود، یک دنباله (a_n) از عناصر M وجود دارد بطوریکه برای هر $b \in M^*$، ارزش $\varphi(p, b)$ برابر است با ارزش نهایی $\varphi(a_n, b)$؛ یعنی برابر است با حد مقادیر ارزشی از این دنباله.

۳. تعداد تاپ‌های $p \in S_\varphi(M^*)$ که در M بطور متناهی ارضاء می‌شوند حداکثر برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

توجه داریم که با استفاده از مشاهد پیلی، امکان ترجمه محک بورگین–فرملین–تالاگراند به نظریه مدل‌ها میسر می‌شود، و براحتی می‌توان دید که نتیجه فوق ترجمه مستقیمی از این محک است.

در فصل بعد اثباتی جدید از یکی از قضایای مهم نظریه مدل‌ها که توسط برونو پوآزآ (Poizat, 1981: 513-522) اثبات شده است را ارائه می‌دهیم.

۵. شمردن تایپ‌های متناهیا ارضاء شده

در این فصل تعمیمی از یک قضیه معروف در نظریه مدل‌ها که اولین بار توسط برونو پوآزآ (Poizat, 1981: 513-522) در ۱۹۸۱ اثبات شده است را ارائه می‌دهیم. قضیه پوآزآ

بیان می‌کند که در تئوری‌هایی که خاصیت وابستگی دارند، تعداد تایپ‌های هم‌ارث روی هر مدل دلخواه حداکثر برابر با کاردینال آن مدل است. در این فصل ثابت خواهیم کرد که شرط وابستگی تئوری ضروری نمی‌باشد و فقط کافیست که شرط وابستگی در یک مدل را در نظر بگیرم. در واقع، دستاورد این فصل (مشابه با حالت پایداری) از دو جنبه موضعی است؛ یعنی، اول اینکه وابستگی یک فرمول است و نه یک تئوری، و دوم اینکه فقط وابستگی در یک مدل مطالعه می‌شود و نه همه‌ی مدل‌های یک تئوری. بنابراین، قضیه پوآزآ نتیجه‌ای از قضیه این فصل می‌باشد. در ادامه این مطلب را بصورت دقیق بیان و اثبات می‌کنیم. در ابتدا نیاز به مفهومی از آنالیز تابعی داریم.

تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد. یک $f\colon X \to \{0,1\}$ را بخش‌شده گوییم اگر برای هر زیرمجموعه بسته D یک زیرمجموعه باز G وجود داشته باشد که با D اشتراک ناتهی دارد و همچنین قطر مجموعه $f[F\cap G]$ صفر باشد. مجموعه همه توابع بخش‌شده روی X را با $B_r(X)$ نشان می‌دهیم.

یادآوری می‌کنیم که $f[F\cap G]=\{r\in\{0,1\}: \exists x\in F\cap D, f(x)=r\}$. همچنین، قطر $f[F\cap G]$ صفر است اگر و فقط اگر تصویر مجموعه $F\cap G$ تحت نگاشت f مجموعه‌ای تک عضوی باشد.

اکنون گزاره‌ای مهم از مقاله‌ی (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, *1978: 845-886*) را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی استفاده خواهد شد.

گزاره ۹: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده، و A زیرمجموعه‌ای کراندار از مجموعه همه توابع پیوسته روی X باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. برای هر دنباله (f_n) از توابع در A، یک زیرمجموعه I از اعداد طبیعی N وجود دارد بطوریکه

$$\{x\in X: f_n(x)=0\ \forall n\in I, f_n(x)=1\ \forall n\in N-I\}=\emptyset.$$

۲. بستار مجموعه A (نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) زیرمجموعه‌ای از $B_r(X)$ است.

برای مشاهده اثبات گزاره فوق به قضیه2F در مقاله (Bourgain, Fremlin, and Talagrand, *1978: 845-886*) مراجعه کنید.

تذکر: شرط (۱) در گزاره فوق معادل با خاصیت وابستگی در نظریه مدل‌ها می‌باشد. درواقع، از این مطلب استفاده خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که در حالتی که یک فرمول

در یک مدل وابسته باشد، آنگـاه بسـتار مجموعـه A (کـه در واقـع متنـاظر بـا تایـپ‌هـای هــم‌ارث اســت) زیرمجموعــه‌ای از $B_r(X)$ مــی‌باشــد. ســرانجام نشــان مــی‌دهــیم کــه کاردینال $B_r(X)$ از تعداد مطلوب تجاوز نمی‌کند و درنتیجه اثبات کامل می‌شود.

گزاره زیر کلید اصلی برای اثبات قضیه این فصل می‌باشد که ایـده آن از مقالـه سـیمون (Simon, 2015: 81-92) اخذ شده است.

گزاره ۱۰: فرض کنید $f: X \to \{0,1\}$ یک تـابع پیوسـته روی فضـای تمامـا ناهمبنـد و فشرده X باشد که پایه‌ای از کاردینال κ دارد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $f \in B_r(X)$.

۲. $f^{-1}(0)$ را می‌توان بصورت $\bigcup_{i<\kappa} F_i$ بیان کرد که هر F_i زیرمجموعه‌ای بسته است.

بــرای مشــاهده اثبــات گــزاره فــوق بــه قضــیه 2.3 در مقالــه (Simon, 2015: 81-92) مراجعه شود.

از گزاره فوق بسرعت می‌توان نتیجه زیر را بدست آورد.

نتیجه ۱۱: اگر X فضای تماما ناهمبند و فشرده بـا پایـه‌ای از کاردینـال κ باشـد، آنگـاه کاردینال $B_r(X)$ حداکثر 2^{κ} است.

برهان: توجه داریم که تمام توابعی چون f کـه $f^{-1}(0)$ را مـی‌تـوان بصـورت $\bigcup_{i<\kappa} F_i$ بیان کرد حداکثر برابر 2^{κ} است، زیرا تعداد زیرمجموعه‌هـای بـه صـورت $\bigcup_{i<\kappa} F_i$ حـداکثر برابر این تعداد است. بنابراین طبق گزاره فوق حکم ثابت می‌شود.

اکنون آماده‌ایم که قضیه اصلی این فصل را ثابت کنیم.

قضیه ۱۲: فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک فرمول وابسته در یک مدل M باشـد. آنگـاه تعـداد تایــپ‌هــایی در $S_{\varphi}(M^*)$ کــه بطــور متنــاهی در M محقــق مــی‌شــوند حــداکثر برابــر کاردینال $2^{|M|}$ است.

برهان: قرار دهیـد $X = S_{\varphi^*}(M)$. آنگـاه X فشـرده و تمامـا ناهمبنـد اسـت. همچنـین، زیرمجموعه‌ای چگال ازکاردینال $|M|$ دارد. اکنون با توجه با مشاهده‌ی پیلـی کـه در فصـل قبل اشاره کردیم، تناظری بین همه توابع در بستار مجموعه

$A = \{\varphi^a: S_{\varphi^*}(M) \to \{0,1\}: a \in M\}$

و همه تایپ‌های هم‌ارث روی M وجود دارد. اکنون با توجه بـه اینکـه $\varphi(x, y)$ در M وابسته اسـت، بسـتار مجموعـه A زیرمجموعـه‌ای از $B_r(X)$ مـی‌باشـد و در نتیجـه دارای

کاردینـال حـداکثر $2^{|M|}$ اسـت. بنـابر ایـن، تعـداد تایـپ‌هـای هـم‌ارث روی M حـداکثر برابر $2^{|M|}$ می‌باشد.

۶. نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های توپولوژیک نتایج بسیار مهمی را به منطق مرتبه اول کلاسیک و نظریه مدل‌ها تقدیم می‌کند و جنبه‌های دیگری از منطق را آشکار می‌نماید. پیوند بین حـوزه‌هـای مختلف ریاضیات از مهمترین دستاوردهای ریاضیدانان است. این پیوندها ابزارهای جدیدی در اختیار آنان قرار می‌دهند و منجر به حل مسائلی خواهند شـد کـه بـا ابزارهـای محـدود قابل‌حل نیستند. در این مقاله، پیوند بین منطق ریاضـی کلاسـیک و توپولـوژی و فضـاهای تابعی بیان شد. دستاوردهای ارائه شده در این مقاله کـاملا جدیـد هسـتند و نویـد نتـایج و کاربردهای بسیاری را در آیند نزدیک می‌دهند.

در انتها ذکر چند نکته در مورد قضیه اصلی فصل قبل و همچنین کاربردها و تعمیم‌های آتی آن ضروری است.

۱. توجه داریم که در حالتی که مدل M شمارا باشد، حکم قضیه فوق از نتـایج فصـل قبـل نتیجه می‌شود. در واقع قضیه این فصل اثبـاتی بـرای حالـت کلـی کـه در آن M مـدلی بـا کاردینال دلخواه می‌باشد ارائه داده است.

۲. در اثبات قضیه فوق روش‌های توپولوژیک استفاده شده است و ایـن اثبـات در نـوع خود حائز توجه و اهمیت است.

۳. از آنجا که دستاوردهای توپولوژیک مورد استفاده در این مقاله برای توابـع بـا ارزش حقیقی (نه لزوما توابع دو ارزشی) نیز برقرار هسـتند، مـی‌تـوان دسـتاوردهای فـوق را بـه منطق‌های چندارزشی و فازی نیز تعمیم داد.

۴. همـانطور کـه پروفسـور دیویـد فـرملین (David Fremlin) بـه نویسـنده ایـن مقالـه متذکر شد، شمردن تعداد توابع بخش‌شده (که در این مقالـه انجـام پـذیرفت) حتـی بـرای متخصصان آنالیز تابعی نیز جدید می‌باشد.

کتاب‌نامه

Ben-Yaacov I. (2014), Model theoretic stability and definability of types, after A. Grothendiek, *Bulletin of Symbolic Logic*, 20, pp 491-496.

Bourgain J., Fremlin D. H., and Talagrand M. (1978). Pointwise compact sets of baire-measurable functions. *American Journal of Mathematics*, 100(4): pp. 845-886.

Gaifman H. (1976), Models and types of Peano's arithmetic. *Ann. Math. Log*ic, 9(3):223-306.

Grothendieck A. (1952), Crit`eres de compacit´e dans les espaces fonctionnels generaux, American Journal of *Mathematics* **74**, 168-186.

Iovino I. (1999), Stable models and reexive Banach spaces. *J. Symbolic Logic*, 64(4):1595-1600.

Khanaki K. (2015), Stability, NIP, and NSOP; Model Theoretic Properties of Formulas via Topological Properties of Function Spaces, , *Mathematical Logic Quarterly*, submitted.

Khanaki K. and Pillay A. (2018), Remarks on NIP in a model, *Mathematical Logic Quarterly*, to appear.

Krivine, J.-L., and Maurey B. (1981), Espaces de Banach stables. *Israel J. Math.*, 39(4):273-295.

Pillay A, (1982), Dimension theory and homogeneity for elementary extensions of a model, *J. Symbolic Logic*, vol 47, 147-160.

Pillay A. (2016), Generic stability and Grothendieck, *South American Journal of Logic,* Vol. 2, n. 2, p. 1-6.

Poizat B. (1981), Theories instables. *J. Symbolic Logic*, 46(3):513–522.

Shelah S. (1971), Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory, *Annals of Mathematical Logic*, vol. 3, no. 3, pp. 271-362.

Simon P. (2015), Rosenthal compacta and NIP formulas, *Fund. Math.* vol. 231, 81-92.