Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 15, No. 1, Spring and Summer 2024, 217-229
https://www.doi.org/10.30465/lsj.2024.49120.1472

Natural Deduction systems for some subintuitionistic logics

Fatemeh Shirmohammadzadeh Maleki*

Abstract

Subintuitionistic logics as a theme were first studied by G. Corsi, who introduced a basic system F in a Hilbert style proof system. The system F is sound and complete with respect to the class of Kripke frames in which the assumption of preservation of truth is dropped and which are not assumed to be reflexive or transitive. Dick de Jongh and F. Sh. Maleki, have introduced a basic logic WF in a Hilbert style proof system, much weaker than F. They proved that subintuitionistic logic WF is sound and complete with respect to the class of neighborhood models with a somewhat more complex definition than the neighborhood models for classical (non-normal) modal logics. So far, no natural deduction system has been presented for any of these two basic systems F and WF. This paper is devoted to the introduction of natural deduction systems for subintuitionistic logics WF and F.

Keywords: Intuitionistic logic, Subintuitionistic logic F, Subintuitionistic logic WF, Natural deduction system, Hilbert style system.

* Assistant Professor, Department of Logic, Iranian Research Institute of Philosophy and Wisdom, f.shmaleki2012@yahoo.com

Date received: 08/01/2024, Date of acceptance: 08/03/2024

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ پژوهشی)، سال ۱۵، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳

دستگاه استنتاج طبیعی برای برخی منطق‌های زیرشهودی

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی*

چکیده

منطق زیر شهودی F که نسبت به معناشناسی کریپکی (بدون نیاز به وجود شرط خاصی روی رابطه‌ی دسترس‌پذیری مدل‌های کریپکی) درست و تمام است، اولین بار توسط جیووانا کرسی مطالعه شد. دستگاه اثباتی ارائه شده برای این منطق، دستگاه اثباتی هیلبرتی است. دستگاه WF، به عنوان یک منطق زیرشهودی دیگری که ضعیف‌تر از دستگاه F است، نخستین بار توسط دیک د یانگ و فاطمه شیرمحمدزاده ملکی معرفی شده است. منطق زیرشهودی WF نسبت به مدل‌های همسایگی جدیدی که تا حدی پیچیده‌تر از مدل‌های همسایگی شناخته شده برای منطق‌های وجهی کلاسیک (غیر-نرمال) است، درست و تمام است. تنها دستگاه اثباتی معرفی شده برای این منطق زیرشهودی ضعیف‌تر، دستگاه اثباتی هیلبرتی است. از آنجا که تا کنون هیچ دستگاه استنتاج طبیعی برای هیچکدام از این دو منطق زیرشهودی پایه ارائه نشده است، در این مقاله تلاش خواهم کرد تا برای هر یک از دو منطق زیرشهودی WF و F یک دستگاه استنتاج طبیعی مناسب (درست و تمام) معرفی کنم.

کلیدواژه‌ها: منطق شهودی، منطق زیرشهودی F، منطق زیرشهودی WF، دستگاه استنتاج طبیعی، دستگاه اثباتی هیلبرتی.

۱. مقدمه

منطق زیر شهودی F، نخستین بار توسط کرسی(Corsi) در سال ۱۹۸۷ [۵] مطالعه شد. دستگاهی که او برای این منطق ارائه داد دستگاه اثباتی هیلبرتی است. دستگاه F توانایی اثبات فرمول‌هایی مانند $A \to (B \to A)$ و $A \to (B \to A \wedge B)$ را ندارد. مدل‌های کریپکی این منطق،

* استادیار گروه منطق، موسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران، f.shmaleki2012@yahoo.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۸

همان مدل‌های کریپکی برای منطق شهودگرایی هستند با این تفاوت که در این مدل‌ها لزومی ندارد قاب مدل کریپکی انعکاسی و متعدی باشد و همچنین لزومی به برقراری شرط حفظ درستی در جهان‌های بالاتر نیست. کرسی با استفاده از ترجمه‌ای شبیه ترجمه گودل(Gödel) ، ارتباط بین منطق زیر شهودی F و منطق وجهی نرمال K را بیان کرد، او در حقیقت اثبات کرد که همتای وجهی منطق زیرشهودی F، کوچک‌ترین منطق وجهی نرمال، یعنی K است. رستال(Restall) [۱۲] دستگاه دیگری به نام SJ را که مشابه همین دستگاه F است را معرفی کرده است، برای مطالعه بیشتر راجع به این دستگاه و ارتباط آن با F به منبع [۶] مراجعه کنید. مطالعه بیشتر روی توسیع‌هایی از F توسط ویسر(Visser) انجام شده است [۱۴]. او منطق پایه BPC را به همراه دستگاه استنتاج طبیعی معرفی و ثابت کرد که این منطق پایه نسبت به مدل‌های کریپکی غیرانعکاسی متناهی، تمام است. نتایج زیادی در مورد این منطق پایه، توسط اردشیر و رویتنبرگ(Ruitenburg) به دست آمده است [۱, ۲, ۳]، به عنوان مثال در [۳]، ترجمه‌ای از منطق شهودی گزاره‌ای IPC به منطق پایه BPC ارائه شده است.

دیانگ و شیرمحمدزاده در [۷, ۸, ۱۳]، منطق پایه WF، به همراه دستگاه اثباتی هیلبرتی را که بسیار ضعیف‌تر از منطق F می‌باشد را معرفی کردند. آن‌ها دو نوع معناشناسی همسایگی را برای چنین منطق‌های زیرشهودی و توسیع‌هایی از آن‌ها ارائه کردند و همچنین همتای وجهی نرمال دوموضعی را برای این منطق زیرشهودی پایه WF فراهم کردند [۹, ۱۰, ۱۵,۱۶].

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، به بیان دستگاه اثباتی هیلبرتی برای منطق‌های زیرشهودی F و WF می‌پردازیم. در بخش ۳، دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق F را معرفی کرده و نشان خواهیم کرد که توان استنتاج دستگاه هیلبرتی F با دستگاه استنتاج طبیعی F برابر است. در بخش ۴، یک دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق WF را معرفی کرده و نشان خواهیم کرد که توان استنتاج دستگاه هیلبرتی WF با دستگاه استنتاج طبیعی WF برابر است.

۲. دستگاه اثباتی هیلبرتی برای منطق‌های زیرشهودی F و WF

در این بخش دستگاه اثباتی هیلبرتی برای منطق‌های زیر شهودی F و WF که قبلاً توسط دیانگ و شیرمحمدزاده معرفی شده است را یادآوری می‌کنیم [۶, ۱۳]. زبان منطق‌های زیرشهودی F و WF همان زبان منطق گزاره‌ای شهودی یعنی $\{\vee,\wedge,\rightarrow,\bot,\top\}$ است. برای عملگر گزاره‌ای $\leftrightarrow$ نیز تعریف استاندارد را به کار می‌بریم. علاوه بر این، مجموعه‌ی شمارای متغیرهای گزاره‌ای و فرمول‌ها طبق معمول تعریف می‌شوند.

۱.۲ دستگاه اثباتی هیلبرتی برای منطق زیرشهودی F

دستگاه اثبات هیلبرتی برای منطق زیر شهودی F تعریف شده از اصل‌ها و قواعد زیر است (برای مطالعه بیشتر راجع به این دستگاه اثباتی می‌توانید به [۴, ۵, ۶, ۱۱] مراجعه کنید):

1. $A \to A \vee B$
2. $B \to A \vee B$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$
6. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$
7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
8. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9. $A \to A$
10. $\bot \to A$
11. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$
12. $\dfrac{A}{B \to A}$
13. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

توجه داشته باشیم که قواعد به این صورت به کار برده می‌شوند که اگر فرمول‌های بالای خط قضایایی از F باشند، آن‌گاه فرمول‌های زیر خط نیز قضایایی از F هستند. در این اصل‌بندی قاعده ۱۱ را قاعده عطفی، قاعده ۱۲ را همانند کرسی، قاعده AF یا تضعیف و قاعده ۱۳ را قاعده وضع مقدم می‌نامیم. در ادامه وقتی بخواهیم در مورد استنتاج از فرضیات بحث کنیم دوباره به این قاعده‌ها مراجعه خواهیم کرد. در [۱۲]، دستگاه SJ قواعد و اصول متفاوتی دارد اما در [۶] اثبات شده است که دستگاه SJ همان دستگاه اثباتی F است، اگر چه قاعده AF را ندارد.

در این بخش، نماد $\Gamma \vdash_{HF} A$ به این معنا است که فرمول A قابل استنتاج از Γ در دستگاه اثباتی هیلبرتی F است.

تعریف ۱.۲. می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{HF} A$، چنانچه یک استنتاج برای A از Γ و قضایای F با استفاده از قواعد $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$ و $\frac{A \quad A \to B}{B}$ وجود داشته باشد، با این شرط که $\vdash_{HF} A \to B$.

توجه کنید که اگر داشته باشیم $\Gamma، \vdash_{HF} A$ آن‌گاه نمی‌توان $\Gamma \vdash_{HF} B \to A$ را نتیجه گرفت. برای مثال، اگر فرض کنیم که Γ برابر با $F \cup \{p\}$ باشد، در این صورت $\Gamma \vdash_{HF} p$ و اما $\Gamma \nvdash q \to p$. در اینجا $\Gamma \nvdash q \to p$ به این معنا است که $q \to p$ از Γ قابل استنتاج نیست. این مثال نشان می‌دهد که صرف این که می‌توانیم یک گزاره A را از مجموعه‌ای از فرضیات Γ

استنتاج کنیم، به این معنا نیست که می‌توانیم گزاره $A \to B$ را نیز از همان مجموعه فرضیات استنتاج کنیم. در مثال داده شده، با فرض اینکه Γ شامل F و {p} است، می‌توان p را از Γ استنتاج کرد، اما نمی‌توان $p \to q$ را از Γ استنتاج کرد.

قضیه ۲.۲. (قضیه استنتاج ضعیف برای دستگاه F)

الف. $A \vdash_{HF} B$ اگر و تنها اگر $\vdash_{HF} A \to B$.

ب. $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{HF} B$ اگر و تنها اگر $\vdash_{HF} A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \to B$.

اثبات. برای اثبات به منبع [۶]، قضیه ۵ مراجعه کنید.

۲.۲ دستگاه اثباتی هیلبرتی برای منطق زیرشهودی WF

در ادامه دستگاه اثبات هیلبرتی برای منطق زیر شهودی WF که منطقی ضعیف‌تر از منطق F است را ارائه خواهیم داد.

دستگاه اثبات هیلبرتی برای منطق زیر شهودی WF تعریف شده از اصل‌ها و قواعد زیر است:

1. $A \to A \vee B$
2. $B \to A \vee B$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $A \to A$
6. $\bot \to A$
7. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$
9. $\dfrac{A}{B \to A}$
10. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$
11. $\dfrac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$
12. $\dfrac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$
13. $\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$
14. $\dfrac{A \leftrightarrow B \quad C \leftrightarrow D}{(A \to C) \leftrightarrow (B \to D)}$

توجه کنید که قواعد منطق WF به این صورت کاربرد خواهند داشت که، هرگاه فرمول موجود در بالای خط قضیه‌ای از WF باشد، آن‌گاه فرمول زیر خط نیز قضیه خواهد بود.

همان‌طور که می‌دانیم در منطق شهودی اغلب اصل‌ها با قاعده‌های متناظرشان متفاوت هستند و این موضوع در اینجا به خوبی نمایان شده است. زیرا در منطق WF، اصول ۵، ۶ و ۷ از منطق F به ترتیب با قاعده‌های متناظرشان، یعنی قاعده‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳، جایگزین شده‌اند و در نتیجه منطق ضعیف‌تری حاصل شده است.

تک قاعده ۱۴ در دستگاه WF معادل دو قاعده ساده‌تر زیر است:

$\frac{A\leftrightarrow B}{(C\to A)\leftrightarrow(C\to B)}$ $\qquad$ $\frac{A\leftrightarrow B}{(A\to C)\leftrightarrow(B\to C)}$

در این بخش، نماد $\Gamma \vdash_{HWF} A$ به این معنا است که فرمول A قابل استنتاج از Γ در دستگاه اثباتی هیلبرتی WF است.

تعریف ۱.۲. می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{HWF} A$، چنانچه یک استنتاج برای A از Γ و قضایای WF با استفاده از قواعد $\frac{A \quad B}{A\wedge B}$ و $\frac{A \quad A\to B}{B}$ وجود داشته باشد، با این شرط که $\vdash_{HWF} A \to B$.

تعریف بالا نشان می‌دهد که قاعده‌های ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ در دستگاه WF تنها زمانی قابل استفاده هستند که هیچ فرضیه‌ای وجود نداشته باشد، یعنی Γ تهی باشد و قاعده‌ی وضع مقدم نیز فقط زمانی قابل استفاده است که $A \to B$ قضیه باشد و یا به بیانی دیگر استنتاج $A \to B$ بدون فرضیات باشد. برای کسب اطلاعات بیشتر راجع به $\Gamma \vdash_{HWF} A$ به منبع [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۲. (قضیه استنتاج ضعیف برای دستگاه WF)

الف. $A \vdash_{HWF} B$ اگر و تنها اگر $\vdash_{HWF} A \to B$.

ب. $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{HWF} B$ اگر و تنها اگر $\vdash_{HWF} A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \to B$.

اثبات. برای اثبات به منبع [۱۳]، قضیه ۱۹۰۲ مراجعه کنید.

۳. دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیرشهودی F

در این بخش ابتدا دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیرشهودی F را معرفی کرده و سپس نشان خواهیم داد که توان استنتاج دستگاه هیلبرتی با دستگاه استنتاج طبیعی برابر است.

تعریف ۱.۳. (دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیر شهودی F) قواعد معرفی و حذف زیر دستگاه استنتاج طبیعی برای F را تشکیل می‌دهند:

قواعد معرفی:

$\frac{\bot}{A}\ \bot$ $\qquad$ $\frac{A}{A\vee B}\ \vee I$ $\qquad$ $\frac{B}{A\vee B}\ \vee I$ $\qquad$ $\frac{A \quad B}{A\wedge B}\ \wedge I$

$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\to B} \to I$ قاعده $(\to I)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که A تنها فرض موجود باشد.

$\frac{A\to B \quad A\to C}{A\to B\wedge C}\ Con$ $\qquad$ $\frac{A\to C \quad B\to C}{A\vee B\to C}\ Dis$ $\qquad$ $\frac{A\to B \quad B\to C}{A\to C}\ Tr$

قواعد حذف:

$$\frac{A\wedge B}{B}\wedge E \qquad\qquad \frac{A\wedge B}{A}\wedge E$$

$\frac{A \quad A\to B}{B}\to E$ قاعده $(\to E)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که هیچ فرضی (بسته نشده) برای $A \to B$ موجود نباشد.

$$\frac{A\vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\ \vee E$$

توجه کنید که در هر دو قاعده‌ی $I \to$ و $\vee E$، فرض‌ها از بین می‌روند. این عمل با قرار دادن فرمول‌ها در داخل [] نشان داده می‌شود و به این معنا است که، فرمولی که در داخل این نماد است از مقدمه‌های استنتاج برای نتیجه نهایی، بعد از به کار بردن قاعده مورد نظر حذف می‌شود.

در این بخش، نماد $\Gamma \vdash_{NF} A$ به این معنا است که فرمول A قابل استنتاج از Γ در دستگاه اثبات استنتاج طبیعی منطق F است.

تعریف ۲.۳. می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{NF} A$، چنانچه یک استنتاجی برای A از گزاره‌های (بسته نشده‌ی) Γ وجود داشته باشد. اگر $\Gamma = \emptyset$، می‌نویسیم $\vdash_{NF} A$ و می‌گوییم که گزاره A قضیه است.

لم ۳.۳. در دستگاه F داریم:

الف. $\vdash_{NF} (A \to B) \wedge (A \wedge B \to C) \to (A \to C)$،

ب. $\vdash_{NF} (A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \wedge C \to B \wedge D)$،

ج. اگر $\vdash_{NF} A \to B$ آن‌گاه $\vdash_{NF} (B \to C) \to (A \to C)$.

اثبات. الف.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\to A} \quad \dfrac{[(A\to B)\wedge(A\wedge B\to C)]^2}{A\to B}}{A\to A\wedge B} \quad \dfrac{[(A\to B)\wedge(A\wedge B\to C)]^2}{A\wedge B\to C}}{A\to C}}{(A\to B)\wedge(A\wedge B\to C)\to(A\to C)}$$

ب.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge C]^1}{A}}{A\wedge C\to A} \quad \dfrac{[(A\to B)\wedge(C\to D)]^2}{A\to B}}{A\wedge C\to B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge C]^1}{C}}{A\wedge C\to C} \quad \dfrac{[(A\to B)\wedge(C\to D)]^2}{C\to D}}{A\wedge C\to D}}{A\wedge C\to B\wedge D}}{(A\to B)\wedge(C\to D)\to(A\wedge C\to B\wedge D)}$$

ج.

$$\dfrac{\dfrac{A\to B \qquad [B\to C]^1}{A\to C}}{(B\to C)\to(A\to C)}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که دستگاه اثباتی هیلبرتی و دستگاه اثباتی استنتاج طبیعی معرفی شده برای دستگاه F معادل هستند، به این معنا که توان استنتاجی این دو دستگاه برابر است.

قضیه ۴.۳. الف. اگر $\Gamma \vdash_{HF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{NF} A$.

ب. اگر $\Gamma \vdash_{NF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{HF} A$.

اثبات. الف. ثابت می‌کنیم که اگر $\Gamma \vdash_{HF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{NF} A$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که همه اصول و قواعد دستگاه اثباتی هیلبرتی منطق F، در دستگاه استنتاج طبیعی معرفی شده در تعریف ۱.۳ قابل استنتاج هستند. تنها برای دو اصل ۷ و ۸ اثبات می‌کنیم. اثبات سایر اصول ساده است. ابتدا نشان می‌دهیم که اصل ۷ از دستگاه اثباتی هیلبرتی F به صورت زیر قابل استنتاج در دستگاه استنتاج طبیعی است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\to B)\wedge(B\to C)]^1}{A\to B} \qquad \dfrac{[(A\to B)\wedge(B\to C)]^1}{B\to C}}{A\to C}}{(A\to B)\wedge(B\to C)\to(A\to C)}$$

سپس ثابت می‌کنیم که اصل ۸ از دستگاه اثباتی هیلبرتی F به صورت زیر قابل استنتاج در دستگاه استنتاج طبیعی است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge(B\vee C)]^1}{A} \qquad [B]^2}{A\wedge B}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge(B\vee C)]^1}{A} \qquad [C]^3}{A\wedge C}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)} \qquad \dfrac{[A\wedge(B\vee C)]^1}{B\vee C}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}}{A\wedge(B\vee C)\to(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}$$

در نهایت، واضح است که قاعده‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳ از دستگاه اثباتی هیلبرتی، به ترتیب همان قاعده‌های $\wedge I$، $\to I$ و $\to E$ در تعریف ۱.۳ هستند. لذا نتیجه می‌گیریم که اگر $\Gamma \vdash_{HF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{NF} A$.

ب. برای اثبات این قسمت از استقراء روی طول درخت استنتاج $\Gamma \vdash_{NF} A$ استفاده می‌کنیم.

۱. اگر $A \in \Gamma$، آن‌گاه واضح است که $\Gamma \vdash_{HF} A$.

۲. اگر A با قاعده $\wedge I$ به دست آمده باشد، آن‌گاه $A = B \wedge C$ و $\Gamma \vdash_{NF} B \wedge C$. در این صورت داریم $\Gamma \vdash_N B$ و $\Gamma \vdash_N C$. طبق فرض استقراء، $\Gamma \vdash_{HF} B$ و $\Gamma \vdash_{HF} C$. در نهایت طبق قاعده عطفی و تعریف ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $\Gamma \vdash_{HF} B \wedge C$.

۳. اگر آخرین قاعده استنتاج $\Gamma \vdash_{NF} A$ قاعده $\wedge E$ باشد، آن‌گاه فرمولی مانند B موجود است به طوری‌که $\Gamma \vdash_{N} A \wedge B$، لذا طبق فرض استقراء داریم $\Gamma \vdash_{H} A \wedge B$. از طرفی دیگر، داریم $\vdash_{H} A \wedge B \to A$. پس طبق قاعده وضع مقدم و تعریف ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $\Gamma \vdash_{HF} A$.

۴. اگر $A = B \to C$ و آخرین قاعده استنتاج $\Gamma \vdash_{NF} A$ قاعده $\to I$ باشد، آن‌گاه طبق دستگاه استنتاج $\mathrm{B} \vdash_{NF} C$ و لذا طبق فرض استقراء داریم $\mathrm{B} \vdash_{NF} C$. در نهایت، طبق قضیه استنتاج برای منطق F نتیجه می‌گیریم که $\vdash_{HF} B \to C$ و لذا $\Gamma \vdash_{HF} A$.

۵. اگر $A = B \to C$ و آخرین قاعده استنتاج $\Gamma \vdash_{NF} A$ قاعده Tr باشد، آن‌گاه فرمولی مانند D موجود است به طوری‌که $\Gamma \vdash_{NF} B \to D$ و $\Gamma \vdash_{NF} D \to C$. طبق فرض استقراء داریم $\Gamma \vdash_{HF} B \to D$ و $\Gamma \vdash_{HF} D \to C$. در این صورت طبق تعریف ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $\Gamma \vdash_{HF} (B \to D) \wedge (D \to C)$. از طرفی دیگر طبق اصل ۷ در دستگاه اثباتی هیلبرتی داریم $\vdash_{HF} (B \to D) \wedge (D \to C) \to (B \to C)$. در نهایت و طبق قاعده وضع مقدم و تعریف ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $\Gamma \vdash_{HF} A$.

اثبات سایر قاعده‌ها نیز مشابه همین موارد است.

۴. دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیرشهودی WF

در این بخش ابتدا دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیرشهودی WF را معرفی کرده و سپس نشان خواهیم داد که توان استنتاج دستگاه هیلبرتی با دستگاه استنتاج طبیعی برابر است.

تعریف ۱.۴. (دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق زیر شهودی WF) قواعد معرفی و حذف زیر دستگاه استنتاج طبیعی برای WF را تشکیل می‌دهند:

قواعد معرفی:

$$\frac{\bot}{A}\ \bot \qquad \frac{A}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge I$$

$\to I \ \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}$ قاعده $(\to I)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که A تنها فرض موجود باشد.

$\to \mathrm{I}_1 \ \dfrac{\begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{(A \to B) \to (A \to D)}$ قاعده $(\to \mathrm{I}_1)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که A و B تنها فرض‌های موجود باشند.

$\dfrac{\begin{matrix}[B] & [D]\\ \vdots & \vdots \\ D & B\end{matrix}}{(B\to A)\to(D\to A)} \to \mathrm{I}_2$ قاعده $(\to \mathrm{I}_2)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که A و B تنها فرض‌های موجود باشند.

قواعد حذف:

$$\frac{A\wedge B}{A}\wedge E \qquad\qquad \frac{A\wedge B}{B}\wedge E$$

$\dfrac{A \quad A\to B}{B} \to E$ قاعده $(\to E)$ تنها در صورتی اعمال می‌شود که هیچ فرضی (بسته نشده) برای $A \to B$ موجود نباشد.

$$\frac{A\vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C} \vee E$$

توجه کنید که در هر چهار قاعده‌ی $\to I$، $\to \mathrm{I}_1$ ، $\to \mathrm{I}_1$ و $\vee$ E، فرض‌ها بسته می‌شوند.

در این بخش، نماد $\Gamma \vdash_{NWF} A$ به این معنا است که فرمول A قابل استنتاج از Γ در دستگاه اثبات استنتاج طبیعی منطق WF است.

تعریف ۲.۴. می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{NWF} A$، چنانچه یک استنتاجی برای A از گزاره‌های (حذف نشده‌ی) Γ وجود داشته باشد. اگر $\Gamma = \emptyset$، می‌نویسیم $\vdash_{NWF} A$ و می‌گوییم که گزاره A قضیه است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که دستگاه اثباتی هیلبرتی و دستگاه اثباتی استنتاج طبیعی معرفی شده برای دستگاه WF معادل هستند، به این معنا که توان استنتاجی این دو دستگاه برابر است.

قضیه ۳.۴. الف. اگر $\Gamma \vdash_{HWF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{NWF} A$.

ب. اگر $\Gamma \vdash_{NWF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{HWF} A$.

اثبات. الف. ثابت می‌کنیم که اگر $\Gamma \vdash_{HWF} A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash_{NWF} A$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که همه اصول و قواعد دستگاه اثباتی هیلبرتی منطق WF، در دستگاه استنتاج طبیعی معرفی شده در تعریف ۱.۴ قابل استنتاج هستند. در ادامه تنها به اثبات قواعد ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ از دستگاه اثباتی هیلبرتی منطق WF خواهیم پرداخت. اثبات سایر اصول و قواعد مشابه اثبات قضیه ۳.۴ است. خط موازی در کنار استنتاج به معنای استفاده مکرر از قواعد دستگاه استنتاج طبیعی است.

قاعده ۱۱، یعنی $\frac{A\to B \quad A\to C}{A\to B\wedge C}$ به صورت زیر در دستگاه استنتاج طبیعی قابل استنتاج است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A\to B}{B} \qquad \dfrac{[A]^1 \quad A\to C}{C}}{B\wedge C}}{A\to B\wedge C}$$

قاعده ۱۲، یعنی $\frac{A\to C \quad B\to C}{A\vee B\to C}$ به صورت زیر در دستگاه استنتاج طبیعی قابل استنتاج است:

$$\dfrac{\dfrac{[A\vee B]^3 \qquad \dfrac{[A]^1 \quad A\to C}{C} \qquad \dfrac{[B]^2 \quad B\to C}{C}}{C}}{A\vee B\to C}$$

قاعده ۱۳، یعنی $\frac{A\to B \quad B\to C}{A\to C}$ به صورت زیر در دستگاه استنتاج طبیعی قابل استنتاج است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A\to B}{B} \qquad B\to C}{C}}{A\to C}$$

قاعده ۱۴، یعنی $\frac{A\leftrightarrow B \quad C\leftrightarrow D}{(A\to C)\leftrightarrow(B\to D)}$ به صورت زیر در دستگاه استنتاج طبیعی قابل استنتاج است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A\to B}{B} \qquad \dfrac{[B]^2 \quad B\to A}{A}}{(A\to C)\to(B\to C)} \qquad \dfrac{\dfrac{[C]^3 \quad C\to D}{D} \qquad \dfrac{[D]^4 \quad D\to C}{C}}{(B\to C)\to(B\to D)}}{(A\to C)\to(B\to D)} \;\|$$

این استنتاج را $\mathcal{D}$ می‌نامیم. مشابه همین استنتاج، استنتاج دیگری مانند $\mathcal{D}'$ برای $(B\to D)\to(A\to C)$ داریم، در نتیجه:

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{(A\to C)\to(B\to D)} \qquad \overset{\mathcal{D}'}{(B\to D)\to(A\to C)}}{(A\to C)\leftrightarrow(B\to D)}$$

ب. برای اثبات این قسمت از استقراء روی طول درخت استنتاج $\Gamma \vdash_{NWF} A$ استفاده می‌کنیم. تنها به اثبات موردی می‌پردازیم که در آن آخرین قاعده استنتاج $\Gamma \vdash_{NWF} A$ قاعده $\to I$ باشد. اثبات سایر موارد مشابه اثبات قضیه ۳.۴ است.

اگر $A = (C\to B)\to(C\to D)$ و آخرین قاعده استنتاج $\Gamma \vdash_{NWF} A$ قاعده $\to \mathrm{I}_1$ باشد، آن‌گاه طبق دستگاه استنتاج $\mathrm{B} \vdash_{NWF} D$ و $D \vdash_{NWF} B$. لذا طبق فرض استقراء داریم $\mathrm{B} \vdash_{HWF} D$ و $D \vdash_{HWF} B$. با استفاده از قضیه استنتاج ضعیف نتیجه می‌گیریم که $\vdash_{HWF} B\leftrightarrow D$، از طرفی دیگر می‌دانیم که $\vdash_{HWF} C\leftrightarrow C$، لذا بنا به قاعده ۱۴ در دستگاه اثباتی هیلبرتی اثبات می‌شود که $\vdash_{HWF} (C\to B)\leftrightarrow(C\to D)$ و در نتیجه $\Gamma \vdash_{HWF} A$.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله برای هر یک از دو منطق زیرشهودی WF و F یک دستگاه استنتاج طبیعی مناسب (درست و تمام) را معرفی کردیم.

کتاب‌نامه

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی، همتاهای وجهی برای برخی منطق‌های زیرشـهودی، منطـق پژوهـی، سـال ۱۲، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۰، ۱۵۱–۱۷۳.

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی، منطق وجهی نرمال دوموضعی، منطق پژوهـی، دوره ۱۴، شـماره ۱، تیـر ۱۴۰۲، ۸۷–۱۰۲.

M. Ardeshir, Aspects of Basic Logic, Ph.D. thesis, Marquette University, Milwaukee (1995).

M. Ardeshir, W. Ruitenburg, Basic propositional calculus I, Mathematical Logic Quarterly 44, 317-343 (1998).

M. Ardeshir, A translation of intuitionistic predicate logic into basic predicate logic, Studia Logica 62, 341-352 (1999).

S. Celani, R. Jansana, A Closer Look at Some Subintuitionistic Logics, Notre Dame Journal of Formal Logic, 42(4), 225-255 (2001).

G. Corsi, Weak Logics with strict implication, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematic, 33:389-406 (1987).

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Subintuitionistic Logics with Kripke Semantics, In 11th International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, TbiLLC 2015, LNCS, pp 333-354, Volume 10148, Springer (2017).

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Subintuitionistic Logics and the Implications they Prove, Indagationes Mathematicae, 10.1016/j.indag.2018.01.013.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Two neighborhood Semantics for Subintuitionistic Logics, In 12th International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, TbiLLC 2018, LNCS, pp 64-85, Volume 11456, Springer (2019).

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary Modal Companions for Subintuitionistic Logics, Mathematics, Logic and their Philosophies, Essays in Honour of Mohammad Ardeshir, pp 35-52 (2021).

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary Modal Logic and Unary Modal Logic, Logic Journal of the IGPL, https://doi.org/10.1093/jigpal/jzac083 (2023).

K. Došen, Modal Translation in K and D و In: Diamonds and Defaults, Volume 229 of the series Synthese Library, pp.\ 103-127 (1994).

G. Restall, Subintuitionistic Logics, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 35, Number 1, Winter (1994).

F. Shirmohammadzadeh Maleki, D. de Jongh, Weak Subintuitionistic Logics, Logic Journal of the IGPLL, doi:10.1093/jigpal/jzw062 (2016).

A. Visser, A propositional logic with explicit fixed points, Studia Logica, 40, 2, 198, 155-175 (1981).