Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 15, No. 1, Spring and Summer 2024, 137-146
https://www.doi.org/10.30465/lsj.2024.49343.1474

Brouwer and Absolutely Unprovable Propositions

Morteza Moniri*

Abstract

In this article, we discuss absolutely unprovable propositions from the point of view of Brouwerian intuitionism. According to Brouwer's definition, a proposition is absolutely unprovable if the creative mind as an ideal mathematician has a proof that both the proposition itself and its negation are unprovable from a constructive point of view. Brouwer has shown that the existence of such propositions is impossible. In his book on Brouwer and Intuitionism, Mark van Atten has described and elaborated Brouwer's short proof on this matter. The Persian translator of this book has reconstructed and explained this proof in two different ways. In this paper, we present a more appropriate reconstruction of Brouwer's proof. In the meantime, we will deal with Gödel's work in generalizing Brouwer's result from propositional logic to first-order predicate logic. In addition, we will point out that such formalizations of intuitionistic ideas in the formal language of logic cannot do justice to Brouwer's ideas.

Keywords: Intuitionism, Brouwer, Logic, Absolutely unprovable propositions.

* Associate Professor, Department of Mathematics, Shahid Beheshti University, ezmoniri@gmail.com
Date received: 06/04/2024, Date of acceptance: 25/06/2024

منطق پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ پژوهشی)، سال ۱۵، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳

براوئر و گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر

مرتضی منیری[*]

چکیده

در این مقاله به گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر از دیدگاه شهودگرایی براوئری می‌پردازیم .بنا به تعریف براوئر، یک گزاره مطلقاً اثبات‌ناپذیر است هرگاه ذهن آفریننده به‌عنوان ریاضیدانی ایده‌آل اثباتی داشته باشد مبنی بر اینکه هم خود آن گزاره و هم نقیض آن از منظر ساختی اثبات‌ناپذیر است. براوئر نشان داده است که وجود چنین گزاره‌هایی ممکن نیست. مارک فان آتن در کتاب خود در مورد براوئر و شهودگرایی، اثبات کوتاه براوئر در این مورد را بیان کرده و شرح و تفصیل داده است. مترجم فارسی این کتاب نیز به دو شکل مختلف این اثبات را بازسازی کرده و توضیح داده است. در این مقاله بازسازی مناسب‌تری از اثبات براوئر ارائه می‌دهیم. در ادامه، به کار گودل در زمینهٔ گسترش حکم براوئر از منطق گزاره‌ها به منطق محمولات مرتبهٔ اول خواهیم پرداخت. به‌علاوه اشاره خواهیم کرد که این‌گونه صوری‌سازی‌های ایده‌های شهودگرایانه در زبان منطق، نمی‌توانند حق مطلب را درمورد ایده‌های براوئر ادا کنند.

کلیدواژه‌ها: شهودگرایی، براوئر، منطق، گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر.

۱. مقدمه

شهودگرایی براوئری یکی از مشهورترین مکتب‌های فلسفی در مورد ریاضیات است. براوئر دشوارنویس است، به همین دلیل، در مورد تفسیر عقاید او بین محققان و حتی طرفدارانش اختلاف وجود دارد. فان آتن (van Atten) فیلسوفی است که در مکتب شهودگرایی هلندی پرورش یافته و امروزه یکی از شارحان براوئر محسوب می‌شود. کتاب او با عنوان On Brouwer

* دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، ezmoniri@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۰۵

یکی از آثار مشهور او در مورد فلسفهٔ شهودگرایی است (van Atten, 2004). این کتاب تحت عنوان فلسفهٔ براوئر توسط آقای دکتر محمد اردشیر ترجمه شده و به چاپ رسیده است (فان آتن، ۱۳۸۷). تا آنجا که مؤلف می‌داند، اردشیر اصلی‌ترین مرجع آشنایی با شهودگرایی در ایران هستند (البته اردشیر جزء منتقدین برخی اصول منطق شهودگرایی هستند و آنها را بازتاب افکار فلسفی براوئر نمی‌دانند. ظاهراً خود براوئر هم توافق صددرصدی با همهٔ اصول این منطق که توسط شاگردش هیتینگ (Heyting) تدوین شده‌اند، نداشته است).

از دید فان آتن، در ریاضیات شهودگرایانه براوئری تنها زمانی می توانیم از یک شیء ریاضی صحبت کنیم که ساختمانی ذهنی برای آن به صورت بالفعل داشته باشیم. یک اثبات برای یک قضیهٔ ریاضی نیز خود یک چنین شیئی است. البته این شیء–اثبات می‌تواند نامتناهی باشد. برای مثال، اثبات یک حکم عمومی در نظریهٔ اعداد متشکل از روشی ساختی است که به ازای هر عدد طبیعی، اثباتی ساختی برای آن حکم به ازای آن عدد فراهم می‌کند. این اثباتی اساساً نامتناهی است. بنابراین، شهودگرایی شکلی از متناهی‌گرایی نیست. در هر حال، یک گزاره تنها زمانی درست تلقی می‌شود که اثباتی ساختی برای آن داشته باشیم.

یک پرسش مهم که در این زمینه مطرح می‌شود آن است که آیا این اثبات باید به‌صورت بالفعل موجود باشد یا اگر به‌نحوی بدانیم که وجود دارد نیز برای درست دانستن آن گزاره کافی است؟ مرجع داشتن یا نداشتن اثبات، چیزی به نام ذهن آفریننده است که مظهر ریاضیدان ایده‌آل است. ریاضیدان ایده‌آل ریاضیدانی است که محدودیت‌های معمول یک انسان را ندارد. برای مثال، ریاضیدان ایده‌آل خستگی‌ناپذیر است و برای ادامهٔ کار خود به قهوه نیاز ندارد! ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا این اعتقاد موجب نزدیک شدن شهودگرایی به افلاطون‌گرایی نمی‌شود؟ منظور از افلاطون‌گرایی، پذیرش وجود اشیای ریاضی به‌صورت مستقل از انسان است. آیا دانش ریاضیدان ایده‌آل، همان مجموعهٔ حقایق افلاطونی نیست؟ پاسخ منفی است. یک راه فهم این تفاوت توجه به مثال ماشین تورینگ است. ماشین تورینگ هم از دید تورینگ بر اساس توانایی‌ها و رفتارهای محاسباتی انسان طراحی شده است، ولی محدودیتی از نظر فیزیکی ندارد. مثلاً محاسبهٔ یک ماشین تورینگ می‌تواند هر بازهٔ زمانی را شامل شود. در عین حال، چنین نیست که ماشین تورینگ بتواند هر مسئلهٔ محاسباتی و الگوریتمی را حل کند. مطالعهٔ مسائلی الگوریتمی که هیچ ماشین تورینگی قادر به حل آنها نیست، از موضوع‌های اصلی مورد مطالعه در نظریهٔ محاسبه‌پذیری به عنوان بخشی از منطق ریاضی، است.

ماشین تورینگ را می‌توان یک انسان محاسبه‌گر ایده‌آل دانست. همانطور که بررسی قدرت محاسباتی ماشین تورینگ یک پرسش معنادار است، پرسش از توانایی‌های ریاضیاتی ذهن آفریننده و ایده‌آل نیز پرسشی معنادار است که براوئر به آن پرداخته است. در واقع، وظیفهٔ اصلی شهودگرایی به عنوان یک مکتب فلسفی دربارهٔ ریاضیات، پاسخ به این پرسش است.

فرض کنید که p گزاره‌ای ریاضی‌ای باشد. از نظر براوئر چه حالت‌هایی در مورد ذهن آفریننده و p ممکن است؟ فان آتن به این موضوع پرداخته است. ۴ حالت در مورد ذهن آفریننده در لحظهٔ کنونی t در رابطه با p ممکن است:

- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای p دارد
- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای $\neg p$ دارد
- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای $p \vee \neg p$ ندارد اما می‌داند که روشی وجود دارد که بر اساس آن می‌تواند در مورد یکی از دو حالت تصمیم بگیرد.
- ذهن آفریننده هیچ روشی برای تصمیم‌گیری در مورد $p \vee \neg p$ نمی‌شناسد.

فان آتن حالت ۳ را اساسی نمی‌داند، چون در نهایت به یکی از دو حالت قبل منجر می‌شود (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۱–۷۲). اما یک حالت دیگر که به ذهن می‌رسد آن است که، ذهن آفریننده می‌داند (یعنی اثباتی ساختی دارد) که نه p و نه $\neg p$ اثبات ندارد. در این حالت گزارهٔ p مطلقاً اثبات‌ناپذیر نامیده می‌شود. از دیدگاه براوئر هیچ گزارهٔ مطلقاً اثبات‌ناپذیری وجود ندارد (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۲). یعنی، این حالت ممکن نیست و نمی‌تواند رخ دهد. در فصل بعد این موضوع را بررسی می‌کنیم. اما قبل از آن چند کلمه در مورد نقش زمان در ریاضیات می‌آوریم.

بر اساس تفسیر شهودگرایی از حقایق ریاضی می‌دانیم که آنها زمانمند هستند. فان آتن اشاره می‌کند که برخی مانند مارتین–لوف (Martin-Löf) خواسته‌اند که این جنبه را حذف کنند، اما براوئر بر آن تاکید داشته است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۶۰). زمانمند بودن حقایق ریاضی چیزی است که چندان مطبوع نیست و ممکن است با تصور اولیهٔ ما از ریاضیات به عنوان مخزنی از حقایق ازلی متناقض باشد. اما باید توجه کنیم که حتی اصول ریاضیات پیشرفتهٔ کنونی نیز قطعی و ازلی نیستند، برای مثال در مورد برخی اصول کاردینال‌های بزرگ توافق وجود ندارد. از طرفی، حتی برخی از احکام بسیار پایه‌ای ریاضیات چون اصل پنجم اقلیدس نیز هنوز محل بحث هستند. حتی اگر افلاطون‌گرایانه معتقد باشیم که هر حکم ریاضی ارزش منطقی ثابتی دارد، نظر ریاضیدانان در مورد پذیرش یک اصل ریاضی در گذر زمان و بر اساس پیامدهای آن

ممکن است تغییر کند. این موارد شاید کمی از تعجب ریاضیدان کلاسیک در مورد تصور براوئری از نقش زمان در ریاضیات بکاهد.

۲. اثبات براوئر

براوئر در رسالهٔ دکتری خود در سال ۱۹۰۷ برای اثبات عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر به زبان هلندی نوشته است:

Zal men nu ooit van een vraag kunnen bewijzen, dat ze nooit uitgemaakt kan worden? Neen, want dat zou moeten uit het ongerijmde. Men zou dus moeten zeggen: Gesteld dat het was uitgemaakt in zin a en daaruit afleiden, tot een contradictie kwam. Dan zou echter bewezen zijn, dat niet a waar was, en de vraag bleef uitgemaakt (van Dalen, 2001: 17).

ترجمهٔ انگلیسی فان آتن از اثبات براوئر برای عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر در زیر آمده است:

Can one ever prove of a proposition, that it can never be decided? No, because one would have to so by reductio ad absurdum. So one would have to say: assume that the proposition has been decided in sense *X*, and from that deduce a contradiction. But then it would have been proved that not *X* is true, and the proposition is decided after all (van Atten, 2004: 26).

پاراگراف فوق را اردشیر این‌گونه ترجمه کرده است:

آیا می‌توان گزاره‌ای را ثابت کرد که هرگز نمی‌تواند تصمیم گرفته شود؟ نه، بنابر برهان خلف. پس می‌توان گفت: فرض کنید که گزارهٔ *X* تصمیم گرفته شده است، و از آن تناقض استنتاج نشده. اما آن‌گاه ثابت می‌شود که نه-*X* راست است، و درنهایت گزاره تصمیم گرفته می‌شود (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۲).

توجه کنید که تصمیم گرفتن درمورد یک جمله به معنای اثبات آن جمله یا اثبات نقیض آن جمله است. ظاهراً در ترجمهٔ فارسی، عبارت «و از آن تناقض استنتاج نشده» اشتباه سهوی است و باید «و تناقضی از آن استنتاج شده» باشد. از طرف دیگر، در پانوشت شماره ۷، صفحهٔ ۸۱، مترجم متذکر می‌شود که برهان خلف در منطق شهودگرایی قابل‌قبول نیست، اما در برهان فوق استفاده از آن ممکن بوده است، زیرا براوئر حکمی از نوع منفی بیان و اثبات کرده است. این نکته‌ای درست در مورد برهان خلف است، زیرا در منطق شهودگرایانه از $\neg\neg\neg p$ می‌توان $\neg p$ را نتیجه گرفت. اما به نظر می‌رسد که اثبات موردنظر با استفاده از برهان خلف نیست. قبل از

توضیح این مطلب، همان پاراگراف فوق از براوئر را با تفاوت اندک در مرجع (van Atten, 2017) که توسط فان آتن این‌گونه به انگلیسی ترجمه شده است را ببینید:

Can one ever demonstrate of a question, that it can never be decided? No, because one would have to do so by reductio ad absurdum. So one would have to say: assume that the question has been decided in sense a, and from that deduce a contradiction. But then it would have been demonstrated that not-a is true, and the question remains decided.

در اینجا «گزاره» به «پرسش» تغییر یافته است. ظاهراً این ابهامی است که در متن اصلی براوئر وجود دارد (Ruitenberg, 2024). برداشت اینجانب از متن فوق از براوئر چنین است:

یک گزارهٔ p (یا یک مسئلهٔ ریاضی) مطلقاً اثبات‌ناپذیر (یا مطلقاً حل‌ناپذیر) است، هرگاه ذهن آفریننده بداند که نه اثباتی (راه‌حلی) برای p وجود دارد و نه اثباتی برای $\neg p$. اما این ناممکن است و دلیل آن با برهان مستقیم (و نه خلف) چنین است. اگر ذهن آفریننده اثباتی داشته باشد مبنی بر این که اثباتی برای p وجود ندارد، خود آن اثبات را می‌توان به اثباتی برای $\neg p$ تبدیل کرد. توجه کنید که $\neg p$ هم‌ارز است با $p \to \bot$ و بنابر تعبیر براوئر–هیتینگ–کولموگروف، یک اثبات $p \to \bot$ تابعی است که هر اثبات p را به اثباتی برای $\bot$ تبدیل می‌کند (Troelstra & van Dalen, 1988: 9). با توجه به اینکه ذهن آفریننده می‌داند اثباتی برای p وجود ندارد، تابع تهی در مورد فوق کار خواهد کرد.

ممکن است به نظر برسد که استدلال فوق، $p \vee \neg p$ را به ازای هر p اثبات می‌کند، ولی چنین نیست. نکته آن است که بنا به فرض، ذهن آفریننده می‌داند (یعنی اثباتی دارد) که p اثبات‌ناپذیر است. این قوی‌تر از آن است که ذهن آفریننده فقط اثباتی به‌صورت بالفعل برای p ندارد. از اینکه فقط بدانیم که p اثبات بالفعلی ندارد، ولی در گذر زمان ممکن است بدست آورد، نتیجه نمی‌شود که $\neg p$. اثبات $\neg p$ یعنی روشی ساختی برای تبدیل هر اثبات "فرضی" p به اثباتی برای تناقض. در این مورد، نیازی نیست که ریاضی‌دان ایده‌آل در ابتدا بداند p اثباتی ندارد، ولی در عوض باید روشی از نوع مورد اشاره را بشناسد. در هر حال، اثبات نقیض یک گزاره به روش اثبات مستقیم است.

فان آتن توضیحی برای اثبات حکم مورد نظر توسط براوئر آورده است. مترجم نیز اثباتی برای آن ذکر کرده است که تا حدود زیادی مانند توضیح فان آتن است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۸۱). این اثبات، به‌خلاف ظاهر اثبات فان آتن، به‌طور صریح متکی به برهان خلف است: فرض کنید ذهن آفریننده اثباتی داشته باشد مبنی بر اینکه نه اثباتی برای p و نه اثباتی برای $\neg p$ وجود ندارد. از عدم وجود اثبات p، $\neg p$ نتیجه می‌شود. به همین ترتیب، از اینکه اثباتی برای $\neg p$

نداریم، $\neg\neg p$ نتیجه می‌شود. از این دو به تناقض می‌رسیم. پس بنابر برهان خلف امکان ندارد که p مطلقاً اثبات‌ناپذیر باشد.

در مکاتبهٔ شخصی‌ای که نویسندهٔ این مقاله با ویم روتنبرگ (Wim Ruitenburg)، منطق‌دان هلندی ساکن آمریکا، داشت، ایشان ترجمهٔ انگلیسی زیر را برای متن مورد اشاره از براوئر پیشنهاد کردند (با تأکید بر اینکه متن هلندی کمی مبهم است):

Can one ever prove of a question that it cannot be decided? No, because if it were, it must be by contradiction. One should thus have to say: Suppose that it was decided in (sense / sentence) a and derive from there come to a contradiction. However, then would have been proven that not-a was true, and the question remained decided (Ruitenberg, 2024).

ترجمهٔ متن فوق با کمی اغماض به‌شکل زیر است:

آیا می‌توان درمورد پرسشی ثابت کرد که نمی‌توان دربارهٔ آن تصمیم گرفت؟ نه، زیرا اگر چنین بود، باید به‌وسیلهٔ تناقض باشد. بنابراین باید گفت: فرض کنید درمورد پذیرش گزاره یا جملهٔ a تصمیم گرفته شده باشد و از آن به تناقض برسید. با این حال، پس از آن ثابت می‌شد که نه-a درست است، و این پرسش تصمیم‌گرفته‌شده باقی می‌ماند.

رویتنبرگ به ابهام مستتر درمورد ماهیت a صراحتاً اشاره می‌کند (Ruitenberg, 2024). در این متن نیز اشارهٔ مستقیمی به برهان خلف وجود ندارد. باز هم تأکید می‌کنیم که $\neg p$، بنابر تعریف، همان $p \to \bot$ است (Troelstra & van Dalen, 1988: 42).

۳. در مورد صوری‌سازی

در بالا دیدیم که اثبات براوئر در مورد عدم وجود احکام مطلقاً اثبات‌ناپذیر را می‌توان اثباتی مستقیم تعبیر کرد. اما خود حکم او را چگونه می‌توان تحلیل کرد؟ خود حکم چنین است: هیچ گزارهٔ مطلقاً تصمیم‌ناپذیری وجود ندارد. در مرجع (van Atten, 2017)، اشاره شده که هیتینگ این حکم را به این شکل صوری کرده است: $\neg\neg(p \vee \neg p)$. اثبات این حکم در دستگاه استنتاج طبیعی به این شکل است که ابتدا، $\neg(p \vee \neg p)$ را فرض می‌کنیم و سپس به تناقض می‌رسیم (Troelstra & van Dalen, 1988: 42). این اثباتی مستقیم و نه با استفاده از برهان خلف است. مترجم در پانوشت ۷ صفحهٔ ۸۱ این کار را انجام داده است.

از طرف دیگر، گودل، با پیگیری این موضوع، به شکل محمولی حکم براوئر هم پرداخته و ثابت کرده که در این حالت، وجود جملات مطلقاً اثبات‌ناپذیر ممکن است:

To be more exact, you can construct a certain number-theoretic propositional function $\varphi(x)$ for which it is free from contradiction to assume in intuitionistic mathematics that $\neg(x)[\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)]$ (Gödel, 1986: 199).

می‌توان محمول نظریه‌اعدادی $\varphi(x)$ را ساخت که در مورد آن بدون افتادن در تناقض می‌توان ثابت کرد که $\neg(x)[\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)]$.

مرجع (Troelstra & van Dalen, 1988: 82) اثباتی برای سازگاری یک چنین حکمی با استفاده از مدل‌های کریپکی (Kripke) دارد. در مورد نظریات گودل در مورد شهودگرایی، مرجع (Hämeen-Anttila, 2020) هم خواندنی است.

کدام‌یک از این دو صوری‌سازی، گزاره‌ای یا مرتبهٔ اول، صوری‌سازی دقیق‌تری از ادعای اصلی براوئر است؟ در مورد تفاوت این دو صوری‌سازی می‌توان گفت که یک گزارهٔ p حکمی کامل است، اما در شکل مرتبهٔ اول مطرح شده توسط گودل با بی‌نهایت حکم مواجهیم، به‌ازای هر x یک حکم $\varphi(x)$. اینکه حکمی کامل چون p موجود باشد به‌طوری که $\neg(p \vee \neg p)$، ممکن نیست. اما در مورد یک مجموعهٔ نامتناهی از احکام، به‌ازای هر x یک حکم $A(x)$، ممکن است. نکته آن است که اشیائی که به‌جای x می‌نشینند، می‌توانند مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند و بنابراین ذهن آفریننده برای بررسی تک‌تک آنها به زمانی نامتناهی نیاز داشته باشد. در این وضعیت، ممکن است حکم عمومی در هیچ لحظه‌ای از زمان تصمیم گرفته نشود.

البته این نحو صوری‌سازی‌ها، بیشتر یک تفسیر از ادعای براوئر است تا خود ادعای او. همانطور که گفتیم، از نظر براوئر در اینجا بحث در مورد احکام یا حتی مسائل و پرسشهای مطلقاً اثبات‌ناپذیر است. ادعای براوئر را شاید بتوان این‌گونه تعبیر کرد: به ازای هر گزارهٔ ریاضی p، یا p اثباتی بالقوه دارد یا $\neg p$ اثباتی بالقوه دارد. این حکمی فرازبانی در مورد توانایی های ذهن آفریننده است و شاید نتوان آن را کاملاً صوری کرد. البته اصول ذهن آفرینندهٔ کرایزل (Kreisel)، تلاشی در این زمینه بوده است (اردشیر، ۱۳۸۴؛ فان آتن، ۱۳۸۷: ۱۵۰–۱۵۱). در این صوری‌سازی از یک عملگر وجهی با یک اندیس زمانی استفاده می‌شود که معنای آن وجود اثباتی در زمان داده شده برای گزاره مورد بحث است. اما برای بیان وجود یک اثبات بالقوه نیاز به سورها هم هست.

آیا استفاده از منطق کلاسیک در مورد احکام فرازبانی از نوع فوق، از دید براوئر مجاز است؟ توجه کنید که منطق شهودی، منطق ساختارهای نامتناهی است، برای یک مجموعهٔ نامتناهی نمی‌توان بدون اثبات پذیرفت که شامل عنصر خاصی هست یا نه. آیا احکام فرازبانی

نیز چنین محدودیتی دارند؟ فان آتن اشاره می‌کند که براوئر از تمایزی که بعداً به زبان–فرازبان نامیده شد آگاه بوده و در ملاقاتی آن را با هیلبرت در میان گذاشته است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۴۷). ایده این تمایز بعدها توسط هیلبرت و گودل و پیروان آنها بسیار مورد توجه قرار گرفت. البته در نظریهٔ ذهن آفرینندهٔ کرایزل، هر چند عملگر وجهی ارائه‌شده به معنایی کلاسیک است، زیرا یا اثباتی در زمان مشخص شده وجود دارد یا ندارد، اما باقی رابطه‌های گزاره‌ای باید به صورت شهودی تعبیر شوند. بنابراین، به نظر می‌آید که از دید کرایزل، استفاده از برهان خلف در استدلال در مورد ذهن آفریننده مجاز نباشد.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر در شهودگرایی پرداختیم. دیدیم که اثبات براوئر در این مورد را می‌توان اثباتی مستقیم تلقی کرد. در ادامه به تعمیم گودل از این موضوع به منطق سورها پرداختیم. در نهایت اشاره کردیم که صوری‌سازی‌های معمول ایدهٔ گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر نمی‌توانند حق مطلب را در مورد این ایده ادا کنند.

کتاب‌نامه

اردشیر، محمد (۱۳۸۴). نظریهٔ ذهن آفرینندهٔ براوئر، ۲۴ (۲)، صص. ۳–۱۳.

فان آتن، مارک (۱۳۸۷). فلسفهٔ براوئر، ترجمهٔ محمد اردشیر، تهران: هرمس.

Gödel, Kurt (1986). Collected Works: Vol. 3: Unpublished Essays and Lectures, Edited by Solomon Feferman, Oxford, England and New York, NY, USA: Oxford University Press.

Hämeen-Anttila, Maria (2020). Gödel on intuitionism and constructive foundations of mathematics, University of Helsinki.

Ruitenburg,Wim (2024). Personal communication.

van Atten, Mark & Sundholm, Göran (2017). “L.E.J. Brouwer's ‘Unreliability of the Logical Principles’: A New Translation, with an Introduction”, History and Philosophy of Logic, 38 (1), pp. 24-47.

van Atten, Mark (2004). On Brouwer, Belmont, CA: Wadsworth/Thomson Learning.

van Dalen, Dirk (2001). Brouwer en de grondslagen van de wiskunde. Utrecht: Epsilon.

Troelstra, Anne S. & van Dalen, Dirk (1988). Constructivism in Mathematics, Vol 1, Amsterdam: North-Holland Press.